Dinámica

MATEMÁTICA

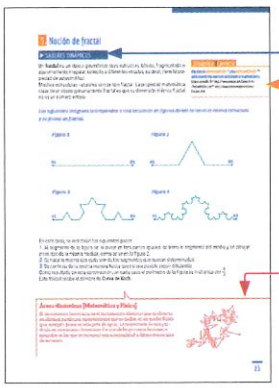
LIBRO CARPETA

6

puerto de palos

Dinámica Matemática 6

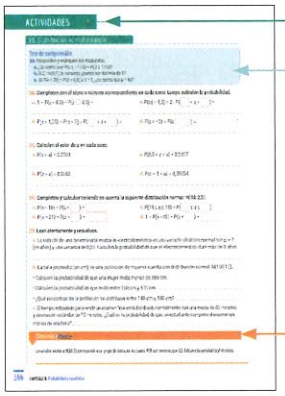
Es una nueva propuesta que facilita el aprendizaje de la matemática a través de 486 actividades que favorecen la comprensión de los distintos temas.



▶ SABERES DINÁMICOS se presentan definiciones, clasificaciones, procedimientos básicos y ejemplos de cada contenido que facilitan la comprensión.

Dinámica TConecta se presentan enlaces web con demostraciones, ejemplos, procedimientos, etcétera.

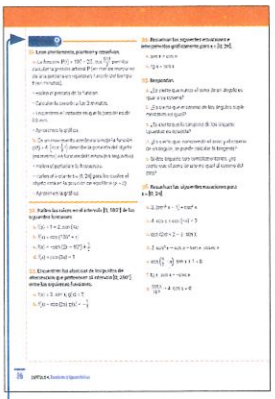
Áreas dinámicas [Matemática y...] se integran contenidos del área con saberes de otras áreas.



ACTIVIDADES para cada tema se proponen distintas actividades que están relacionadas de manera secuencial.

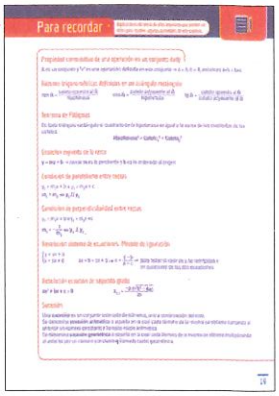
TEST DE COMPRENSIÓN se presentan preguntas básicas que permiten evaluar la comprensión de la teoría y trabajar sobre errores frecuentes.

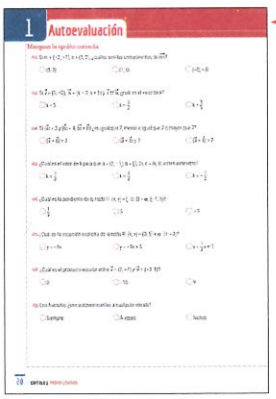
DinámicaMente propone situaciones problemáticas con un mayor nivel de complejidad.



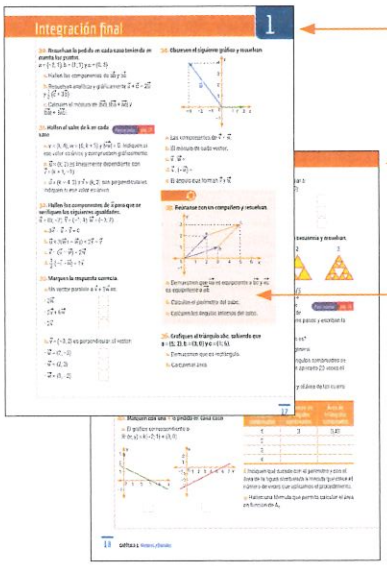
actividades del estilo de las evaluaciones educativas nacionales e internacionales.

explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades.





Autoevaluación incluye más actividades para que cada alumno pueda evaluar los conocimientos adquiridos durante el capítulo.



Integración incluye más actividades para resolver en la carpeta.

actividades para realizar en grupos.

Trabajo con capacidades

En todos los capítulos se ofrecen variadas actividades orientadas a desarrollar valores y habilidades del ciudadano del siglo XXI.

ÍNDICE

Capítulo 1: VECTORES Y FRACTALES

1. Vectores 5
2. Adición y sustracción de vectores. 7
3. Producto con vectores. Módulo de un vector 9
4. Ecuación vectorial de la recta. 13
5. Noción de fractal. 15

Integración final 17
Para recordar 19
Autoevaluación 20

Capítulo 2: NÚMEROS COMPLEJOS

6. El conjunto de los números complejos 21
7. Módulo de un complejo. Forma polar y trigonométrica. 23
8. Adición y sustracción. 25

Integración 6-7-8 27

9. Potencias de i. Cuadrado y cubo de un complejo 29
10. Multiplicación y división. 31
11. Operaciones combinadas. 35

Integración final 39
Para recordar 41
Autoevaluación 42

Capítulo 3: FUNCIONES

12. Función parte entera, por partes y valor absoluto 43
13. Función lineal. 47
14. Función cuadrática. 51

Integración 12-13-14 55

15. Función polinómica. 57
16. Función racional. 61
17. Función homográfica. 63
18. Estudio de funciones. 67

Integración final 69
Para recordar 71
Autoevaluación 72

Capítulo 4: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

19. Funciones trigonométricas. 73
20. Interpretación y análisis de funciones trigonométricas. 77
21. Funciones trigonométricas inversas. 79
22. Ecuaciones trigonométricas. 81

Integración final 85
Para recordar 87
Autoevaluación 88

Capítulo 5: LÍMITES

23. Concepto intuitivo de límite. 89
24. Límite de una función. 91
25. Propiedades de los límites. 93
26. Límites infinitos. 95

Integración 23-24-25-26 97

27. Indeterminaciones del tipo 0/0. 99
28. Indeterminaciones del tipo ∞/∞ 101
29. Continuidad de una función en un punto. Discontinuidades. 103
30. Asíntotas. 105

Integración final 107
Para recordar 109
Autoevaluación 110

Capítulo 6: DERIVADAS

31. Concepto de derivada. 111
32. Derivación de funciones elementales. 113
33. Derivación de funciones compuestas. 117
34. Recta tangente y recta normal. 119

Integración 31-32-33-34 121

35. Extremos relativos. 123
36. Concavidad. 125
37. Análisis y gráfico de funciones. 127
38. Optimización. 131

Integración final 133
Para recordar 135
Autoevaluación 136

Capítulo 7: INTEGRALES

39. Función primitiva. Integrales definidas. 137
40. Integración por sustitución. 139
41. Integración por partes. 141
42. Integrales definidas. Regla de Barrow. 143
43. Cálculo de áreas. 145

Integración final 147
Para recordar 149
Autoevaluación 150

Capítulo 8: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

44. Variables aleatorias. 151
45. Parámetros de posición y dispersión. 153
46. Correlación lineal entre variables aleatorias. Recta de regresión. 155
47. Lectura, análisis e interpretación de gráficos de dispersión. 157

Integración 44-45-46-47 159

48. Distribuciones continuas. 161
49. Distribución normal. Esperanza matemática. 163
50. Distribución normal estándar. 165
51. Distribución binomial. 167

Integración final 171
Para recordar 173
Autoevaluación 174

Tablas de distribución normal y binomial 175

1 Vectores y fractales

1. Vectores

▶ SABERES DINÁMICOS

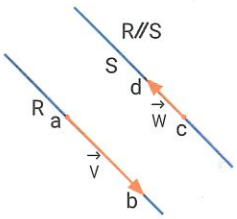
Un **vector** es un segmento orientado que tiene un origen y un extremo. $\overrightarrow{ab}$ es un vector con origen en a y extremo en b. También se lo puede nombrar con una letra minúscula: $\vec{v}$.
Todo vector está caracterizado por una **dirección**, un **sentido** y un **módulo**.

- La dirección de un vector $\vec{v}$, está dada por la recta que lo incluye o recta sostén.

Dos vectores tienen la misma dirección cuando se encuentran sobre una misma recta sostén o en rectas paralelas. Si dos vectores se encuentran sobre la misma recta sostén, son colineales.

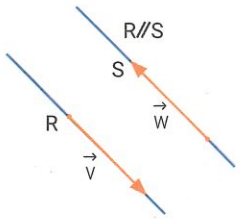
- El sentido de un vector $\vec{v}$ está indicado por la orientación de la flecha.
- El módulo $|\vec{v}|$ es la longitud o la medida del vector.

Los vectores $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{cd}$ tienen la misma dirección, distinto sentido y distinto módulo.



Los vectores que tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo se llaman **vectores equipolentes.**
Si dos vectores tienen el mismo módulo, la misma dirección, pero sentido contrario, se dice que son **vectores opuestos.**

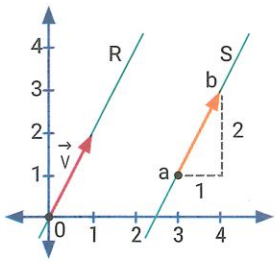
$\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores opuestos.



Vectores referidos al origen de coordenadas

Cuando se representa un vector equipolente a $\overrightarrow{ab}$, de forma tal que el origen de este nuevo vector coincide con el origen de coordenadas, se obtiene un **representante canónico**.

$\vec{v}$ es un representante canónico que tiene por componentes (1; 2).
$\overrightarrow{ab} \uparrow\uparrow \vec{v}$ se lee: "vector ab equipolente al vector $\vec{v}$".



Cuando el origen de un vector es el origen de coordenadas, las coordenadas del punto extremo coinciden con las componentes del vector.

Dado $\overrightarrow{ab}$ tal que $a = (x_a; y_a)$ y $b = (x_b; y_b)$, para hallar las componentes del representante canónico se aplica la siguiente fórmula:

$$\overrightarrow{ab} \uparrow\uparrow \vec{v} = (x_b - x_a; y_b - y_a)$$

TIP
⇒ significa entonces.

$a = (2; -1) \rightarrow b = (1; -3) \Rightarrow \vec{v} = (1 - 2; -3 + 1) \Rightarrow \vec{v} = (-1; -2)$

El **vector nulo** es aquel en el cual coinciden el origen y el extremo. En símbolos se puede expresar como $\vec{v}_0$ o bien $\vec{0}$. La representación gráfica de $\vec{v}_0$ es un punto y sus coordenadas, (0; 0).

ACTIVIDADES

1. Vectores

Test de comprensión

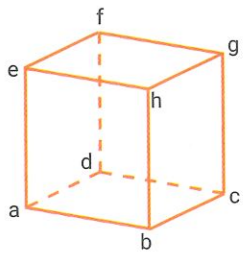
1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Dos vectores que tienen la misma dirección, ¿son siempre equipolentes?

b. Dos vectores que tienen sentidos contrario, a veces ¿son opuestos?

c. $\vec{v}$ es un representante canónico que tiene por componentes (3; 5), entonces el módulo de $\vec{v}$, ¿es 8?

2. Completen teniendo en cuenta el siguiente cubo.



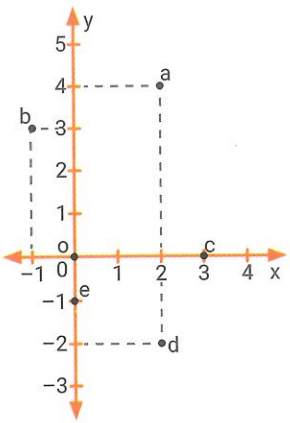
a. $\vec{ef}$ y $\vec{cb}$ son vectores _____.

b. $\vec{ae}$ y $\vec{cg}$ son vectores _____.

c. $\vec{eh}$ tiene igual dirección que _____.

d. Volumen del cubo = 8 cm³, entonces el módulo de $\vec{ad}$ es _____.

3. Observen el siguiente sistema de ejes y resuelvan.



a. Escriban las coordenadas de los puntos indicados.

a = _____; b = _____; c = _____;

d = _____; e = _____

b. Hallen gráficamente e indiquen sus componentes.

- El representante canónico de $\vec{ba}$ y de $\vec{dc}$. _____
- El vector opuesto al $\vec{oe}$. _____
- Un vector equipolente al $\vec{oc}$. _____
- Un vector de igual dirección que $\vec{ed}$ y distinto módulo. _____

4. Completen la siguiente tabla.

Componentes del vector	Origen del vector	Extremo del vector
(2; −2)	(1; 3)	
$(\sqrt{2}; 3)$		$(2\sqrt{2}; 0)$
	$\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$	(1; 3)

5. Hallen los valores de a y b en cada caso.

Para recordar pág. 19

a. Componentes del vector = (a; −1); origen del vector = (3; −b) y el extremo = (5; −2).

b. Componentes del vector = (−2; b); origen del vector = (−1; a) y el extremo = (b; 2a).

c. Componentes del vector = (5; −5); origen del vector = (a; b) y el extremo = (3b; 2a).

2. Adición y sustracción de vectores

▶ SABERES DINÁMICOS

Las componentes del vector suma o resta son iguales a la suma o a la resta de las componentes de los vectores sumados.

$$\vec{v} = (v_x; v_y) \wedge \vec{w} = (w_x; w_y) \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x; v_y + w_y)$$

$$\vec{v} = (v_x; v_y) \wedge \vec{w} = (w_x; w_y) \Rightarrow \vec{v} - \vec{w} = (v_x - w_x; v_y - w_y)$$

TIP

$\wedge$ significa y.

Sean: $\vec{v} = (2; -3)$ *y* $\vec{w} = (1; 2)$

$\vec{v} + \vec{w} = (2; -3) + (1; 2)$

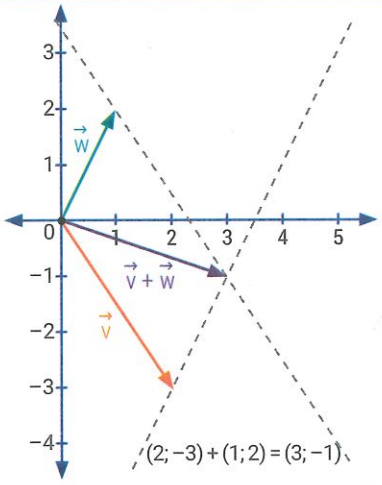
$\vec{v} + \vec{w} = (2 + 1; -3 + 2) = (3; -1)$

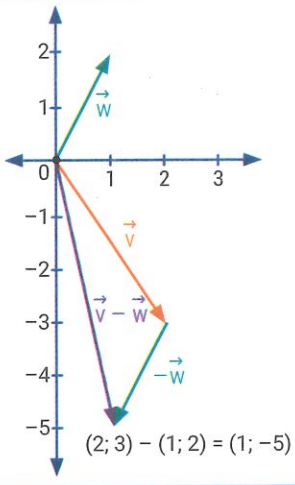
$\vec{v} - \vec{w} = (2; -3) + (1; 2)$

$\vec{v} - \vec{w} = (2 - 1; -3 - 2) = (1; -5)$

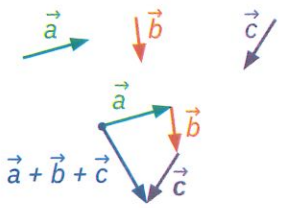
Para **sumar gráficamente**, se debe emplear la regla del paralelogramo o bien la regla de la poligonal.
Para **restar gráficamente**, se suma el opuesto del segundo vector.

Regla del paralelogramo	Regla de la poligonal
Se grafican los vectores con el origen en común. Por el extremo de cada uno de ellos se traza una paralela al otro vector, determinando un paralelogramo. La diagonal del paralelogramo, con origen en el origen de los vectores sumados, es el vector suma.	Se grafica un vector y a continuación, desde el extremo de este, se grafica el otro vector, cuidando de mantener la equipolencia. El vector suma es el que queda determinado por el origen del primer vector y el extremo del segundo.





Cuando se tienen que sumar más de dos vectores, conviene utilizar la regla de la poligonal.



ACTIVIDADES

2. Adición y sustracción de vectores

Test de comprensión

6. Respondan y expliquen las respuestas.

a. La resta de dos vectores ¿es conmutativa?

b. La resultante de la suma de vectores ¿puede ser el vector nulo?

c. $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 3$, entonces $|\vec{a} + \vec{b}|$ ¿es siempre 5?

7. Resuelvan analítica y gráficamente (apliquen la regla indicada en cada caso).

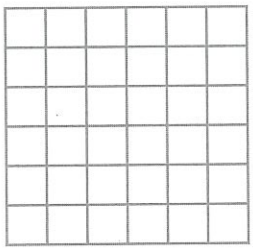
Sean los vectores: $\vec{a} = (-2; -3)$; $\vec{b} = (1; -2)$; $\vec{c} = (0; 5)$ y $\vec{d} = (-2; 0)$.

a. $\vec{a} - \vec{b} =$

- Analíticamente: _____

_____

- Gráficamente (regla del paralelogramo):

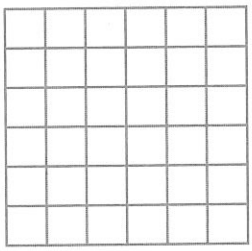


c. $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c} =$

- Analíticamente: _____

_____

- Gráficamente (regla de la poligonal):

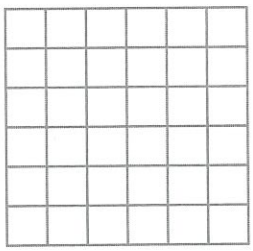


b. $\vec{c} + \vec{d} =$

- Analíticamente: _____

_____

- Gráficamente (regla del paralelogramo):

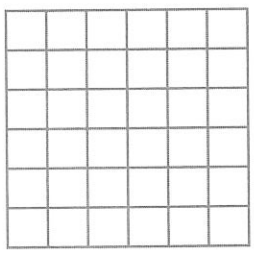


d. $\vec{c} + \vec{d} + \vec{b}$

- Analíticamente: _____

_____

- Gráficamente (regla de la poligonal):



8. Hallen el valor de a y b en cada caso.

a. $(-3; 2b - 4) + (-2; 1) = (a; 5)$

_____

_____

_____

a = _____ b = _____

b. $(a - b; 1) - (b; -3) = (-2; a)$

_____

_____

_____

a = _____ b = _____

c. $(2a; a + b) + (3; 2b) = (5; 6)$

_____

_____

_____

a = _____ b = _____

3. Producto con vectores. Módulo de un vector

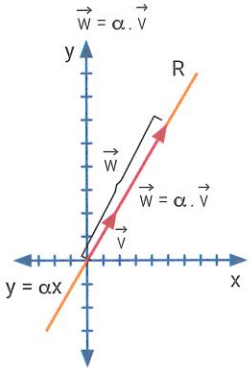
▶ SABERES DINÁMICOS

Producto de un escalar por un vector

$$\alpha \cdot \vec{v} = (\alpha \cdot v_x; \alpha \cdot v_y)$$

El **producto** de un **escalar** α **por un vector** $\vec{v}$ es un vector $\vec{w}$ que cumple con las siguientes condiciones:

- Tiene la misma dirección que $\vec{v}$.
- Su módulo es igual a $|\alpha|$ veces el módulo de $\vec{v}$.
- El sentido es el mismo que el de $\vec{v}$ si $\alpha > 0$ y opuesto si $\alpha < 0$.

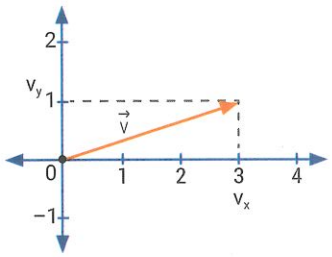


Cuando un vector $\vec{w}$ puede expresarse como el producto entre un escalar distinto de cero y un vector $\vec{v}$, se dice que los vectores son **linealmente dependientes.**

La dirección de ambos vectores está dada por una recta sostén de ecuación $y = \alpha . x$.
Si $\vec{w} = \alpha . \vec{v}$, entonces $\vec{w}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.
En particular, si $\alpha = 0$, lo que se obtiene es el **vector nulo** y si $\alpha = -1$, se obtiene el **vector opuesto.**

Módulo de un vector

El **módulo** de un vector se calcula mediante el teorema de Pitágoras.
Como el módulo es la longitud de un segmento, resulta siempre que $|\vec{v}| \geq 0$.



$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Para un vector $\vec{v} = (3; 1)$, *su módulo es:* $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{10}$

El módulo de un vector, dados su origen y su extremo, es: $|\overrightarrow{ab}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

Producto escalar de dos vectores

El **producto escalar** entre dos vectores da por resultado un **número real** y se define, en función de sus componentes, como:

$$\vec{v} = (v_x; v_y) \wedge \vec{w} = (w_x; w_y) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

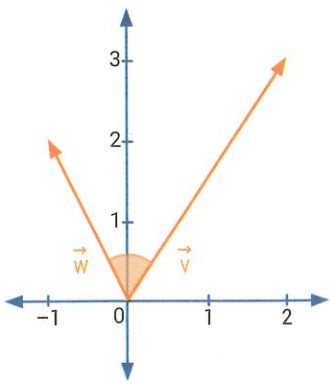
$$\vec{v} = (2; 3) \wedge \vec{w} = (-1; 2) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 4$$

Interpretación geométrica del producto escalar

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \widehat{\vec{v}\,\vec{w}}$$

El ángulo determinado por los dos vectores se calcula despejando la fórmula anterior.

$$\widehat{\vec{v}\,\vec{w}} = \text{arc cos} \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$



$$\widehat{\vec{v}\,\vec{w}} = \text{arc cos} \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \text{arc cos} \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \text{arc cos } 0{,}496 =$$

$$\widehat{\vec{v}\,\vec{w}} = 60^\circ\ 14'\ 45{,}41''$$

ACTIVIDADES

3. Producto con vectores. Módulo de un vector

Test de comprensión

9. Respondan y expliquen las respuestas.

a. El producto escalar de dos vectores opuestos ¿es cero?

b. $|\vec{v}| = 2$ y $|\vec{w}| = 3$, es cierto que $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ¿es siempre 6?

c. El producto escalar entre dos vectores colineales del mismo sentido ¿es igual al producto de los módulos de cada vector?

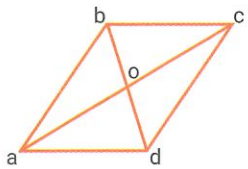
10. Completen con el vector correspondiente.

a. $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{od} =$ ☐

b. $\overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} =$ ☐

c. $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} =$ ☐

d. $\overrightarrow{ab} - \overrightarrow{da} =$ ☐



11. Resuelvan teniendo en cuenta los vectores.

$\vec{v} = (3; 2)$ y $\vec{w} = (-1; -2)$

a. $|\vec{v}| =$ _____

b. $|\vec{w}| =$ _____

c. $|\vec{v} - \vec{w}| =$ _____

d. $|\vec{v}| + |\vec{w}| =$ _____

e. $\vec{v} \cdot \vec{w} =$ _____

f. $\widehat{\vec{v}\,\vec{w}} =$ _____

12. Reúnanse con un compañero y hallen el valor de k para que los vectores sean linealmente dependientes, es decir, que sus componentes sean proporcionales.

a. $\vec{v} = (2; 5)$ y $\vec{w} = (k; -15)$ _____

b. $\vec{v} = \left(k; \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{w} = (5; 2)$ _____

c. $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; k\right)$ y $\vec{w} = (2; k - 3)$ _____

13. Hallen a y b para que cumplan las condiciones en cada caso.

a. $(-3; 5) \cdot a + (-1; b) = \vec{0}$ _____

b. $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{8}; a) - (b; 0) = (6; \sqrt{2})$ _____

c. $(-3; 5) = a \cdot (2; 3) + b \cdot (-1; 2)$ _____

d. $(a + b; 3) = (2; a - b)$ _____

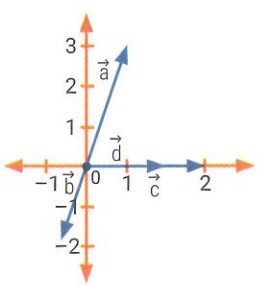
14. Completen con el escalar que verifique la igualdad en cada caso.

a. $\vec{a} =$ ☐ $\cdot \vec{b}$

b. $\vec{b} =$ ☐ $\cdot \vec{a}$

c. $\vec{c} =$ ☐ $\cdot \vec{d}$

d. $\vec{d} =$ ☐ $\cdot \vec{c}$



3. Producto con vectores. Módulo de un vector

15. Observen la figura y resuelvan, sabiendo que volumen del cubo = 125 cm³.

Para recordar pág. 19

a. $\vec{db} + \vec{bh} =$

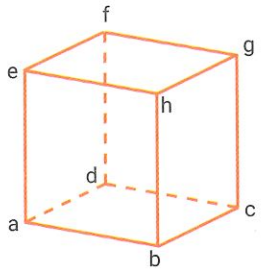
b. $\vec{ef} + \vec{fg} =$

c. $|\vec{eg}| =$

d. $|\vec{dh}| =$

e. $\vec{ab} \cdot \vec{ae} =$

f. $\vec{ae} \cdot \vec{gc} =$



16. Tengan en cuenta que un versor ($\check{v}$) es un vector cuyo módulo es igual a 1 y $\check{i} = (1; 0)$, $\check{j} = (0; 1)$ y expresen cada vector como $\vec{v} = v_x \cdot \check{i} + v_y \cdot \check{j}$.

a. $\vec{a} = (2; -5)$ $\quad \vec{a} =$ _____

b. $\vec{b} = (-3; 1)$ $\quad \vec{b} =$ _____

c. $\vec{c} = (1; 1)$ $\quad \vec{c} =$ _____

d. $\vec{d} = (-2; 0)$ $\quad \vec{d} =$ _____

e. $\vec{e} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c}$ $\quad \vec{e} =$ _____

17. Calculen lo pedido en cada uno de los siguientes casos.

a. $a = (3; -2)$; $b = (2; 1)$

$|\vec{ab}| =$ _____ Componente del $\vec{ab} =$ _____

b. $\vec{a} = \sqrt{2}\,\check{i} + \sqrt{3}\,\check{j}$; $\vec{b} = \sqrt{2}\,\check{i} - \sqrt{3}\,\check{j}$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} =$ _____

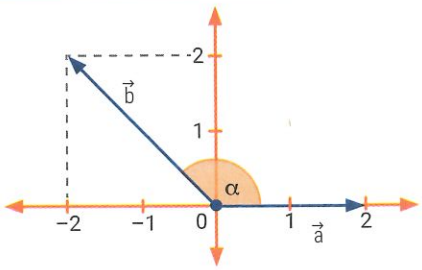
c. $\vec{a} = (-3; 0)$; $\vec{b} = (2; 0)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ $\quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} =$ _____

d. $\vec{a} = (-k; 2)$; $\vec{b} = (1; k + 1)$; $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$.

$k =$ _____

e.



$\hat{\alpha} =$ _____

f. $\vec{a} = (k; k + 1)$; $|\vec{a}| = 5$

Para recordar pág. 19

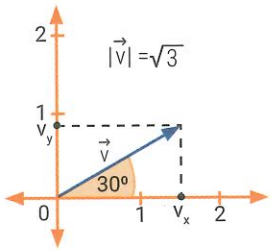
$k =$ _____

ACTIVIDADES

3. Producto con vectores. Módulo de un vector

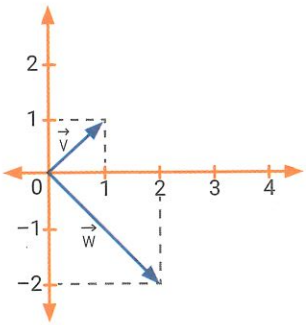
18. Observen el siguiente gráfico y resuelvan.

Para recordar pág. 19



$V_x =$ ____ $V_y =$ ____ $\vec{V} =$ ____

19. Demuestren que $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{w}$.



20. Lean atentamente y respondan.

Un bote se desplaza a una velocidad relativa al agua de $\vec{V}_b$ = 4 m/s. La velocidad del agua es $\vec{v}_a$ = 3 m/s. Calculen:

a. La velocidad del bote respecto a la tierra, si se desplaza en el mismo sentido que la corriente.

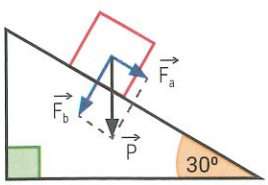
b. La velocidad del bote respecto a la tierra, si se desplaza en sentido contrario a la corriente.

c. El tiempo, en minutos, que tarda el bote en desplazarse una distancia de 500 m hasta el punto "p" y regresar al punto de partida "o". Consideren cada tramo a la velocidad constante.

DinámicaMente

Para recordar pág. 19

Un paquete que pesa 20 kg se desliza por un plano inclinado que forma 30° con la horizontal. Calculen la intensidad de las fuerzas $\vec{Fa}$ y $\vec{Fb}$, siendo $\vec{Fa}$ la fuerza que lo hace deslizar por el plano y $\vec{Fb}$ la fuerza que adhiere el paquete al plano inclinado.

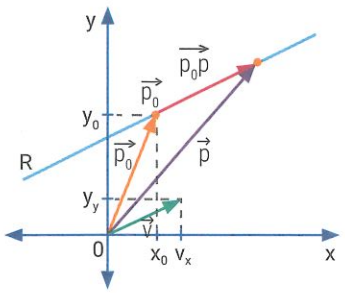


4. Ecuación vectorial de la recta

▶ SABERES DINÁMICOS

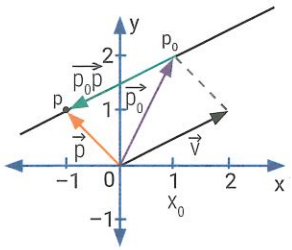
Un vector está **asociado** a una recta cuando tiene su misma dirección, es decir, que puede estar incluido en la recta o en una paralela a ella. Dados un punto p_0 perteneciente a una recta R y un vector $\vec{v}$ asociado a ella, se puede hallar su **ecuación vectorial**.
Cualquier punto p, perteneciente a la recta R, determina con el punto p_0 un vector $\overrightarrow{p_0p}$ paralelo al vector asociado.

$\vec{p} = \vec{p_0} + \overrightarrow{p_0p}$ (1)
Como $\overrightarrow{p_0p}$ es paralelo a $\vec{v}$, resulta:
$\overrightarrow{p_0p} = \alpha . \vec{v}$ (2)
Reemplazando (2) en (1), se obtiene:



$\vec{p} = \vec{p_0} + \alpha . \vec{v} \wedge \alpha \in R$ → Ecuación vectorial de la recta.

$R: (x; y) = (x_0 + y_0) + \alpha . (v_x; v_y)$ → En función de las componentes de cada vector.



$\vec{v} = (2; 1)$ y $\vec{p_0} = (1; 2)$
La ecuación vectorial de la recta A es: $A = (x; y) = (1; 2) + \alpha . (2; 1)$
Asignándole valores a α, se obtienen todos los puntos de la recta.
$\alpha = -1 \Rightarrow p = (1; 2) + (-1) . (2; 1) \Rightarrow p = (-1; 1)$

Relación entre la ecuación vectorial y la explícita

Ecuación vectorial	Ecuación explícita
$R: (x; y) = (x_0; y_0) + \alpha . (v_x; v_y)$	$y = \frac{v_y}{v_x} . x + b$

Dados $p_0 = (-1;3)$ y $\vec{v} = (3; -2)$, siendo $\vec{v}$ un vector asociado a la recta R, hallen su ecuación explícita.

$R: (x; y) = \underbrace{(-1; 3) + \alpha . (3; -2)}_{\text{Ecuación vectorial}} \Rightarrow R: (x; y) = (-1 + 3\alpha; 3 - 2\alpha)$

$R: \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \Rightarrow \frac{x+1}{3} = \alpha \\ y = 3 - 2\alpha \Rightarrow \frac{y-3}{-2} = \alpha \end{cases}$

$R: \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow R: -2 . (x + 1) = 3 . (y - 3) \Rightarrow R: -2x - 2 = 3y - 9 \Rightarrow R: 3y = -2x - 2 + 9$

$\Rightarrow R: -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ Ecuación explícita

TIP

∈ significa pertenece.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/ecvec * para mirar un video donde se explica un ejemplo acerca de la ecuación vectorial de la recta.

* Enlace acortado de https://youtu.be/mGJg0nNetc0?t=287

ACTIVIDADES

4. Ecuación vectorial de la recta

Test de comprensión

21. Respondan y expliquen las respuestas.

a. El punto $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ¿pertenece a la recta R: $(x; y) = \alpha.(1; 2)$?

b. $(9; 11) \in$ R: $(x; y) = (1; -1) + \alpha.(2; 3)$, entonces ¿$\alpha = 4$?

c. La pendiente de R: $(x; y) = (2 + 2\alpha; 3 + \alpha)$ ¿es 2?

22. **Marquen con una X la respuesta correcta.**

a. El punto $(x; y)$ que pertenece a la recta R: $(x; y) = (2; 3) + \alpha.(2; 1)$ es:

- $(4; -4)$ ☐
- $(0; 3)$ ☐
- $(-2; 1)$ ☐

b. R: $(x; y) = \alpha.(-1; 3)$ es la recta:

- $y = -x + 3$ ☐
- $y = -3x$ ☐
- $y = \frac{1}{3}x$ ☐

23. **Determinen el valor de k para que cumpla las condiciones.**

Para recordar pág. 19

a. $\left(k; \frac{3}{5}\right) \in$ R: $(x; y) = \alpha.(1; 3)$ _____

b. $y = kx + 1$ sea paralela a R: $(x; y) = (2; 1) + \alpha.(2; 5)$ _____

c. $y = kx + 1$ sea perpendicular a R: $(x; y) = (2; 1) + \alpha.(2; 5)$ _____

24. **Resuelvan dados los puntos a = (−1; 1) y b = (1; −3).**

a. Hallen la ecuación vectorial de la recta M que pasa por el punto (5; 2) y es paralela a $\overrightarrow{ab}$.

_____

b. Hallen la ecuación vectorial de la recta N que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a $\overrightarrow{ab}$.

_____

25. **Resuelvan sabiendo que p = (2; 9) y q = (3; 7).**

a. Hallen las componentes de $\overrightarrow{pq}$. _____

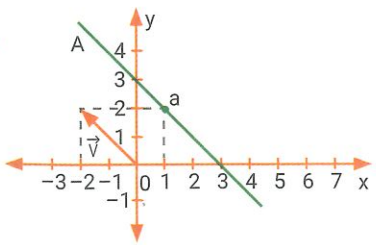
b. Hallen la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos p y q.

_____

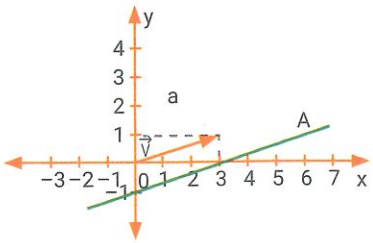
c. ¿Cuál es la pendiente de esa recta? _____

26. **Encuentren la ecuación vectorial de cada una de las siguientes rectas. Escriban la ecuación explícita.**

a.



b.



_____ _____

5. Noción de fractal

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **fractal** es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas, es decir, tiene la propiedad de autosimilitud.
Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. La propiedad matemática clave de un objeto genuinamente fractal es que su dimensión métrica fractal no es un número entero.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fract * y en puerto.pub/fract2 ** para conocer más acerca de los fractales y su aplicaciones.
Enlaces acortados de * https://www.youtube.com/watch?v=4u-7TwSwo0rUltar y de ** https://www.meteorologiaenred.com/fractales.html

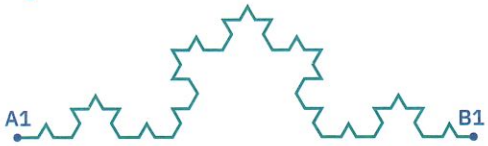
Las siguientes imágenes corresponden a una secuencia de figuras donde se repite la misma estructura y se forma un fractal.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

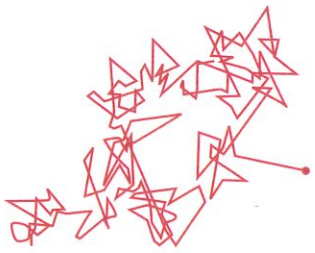


En este caso, se realizaron los siguientes pasos:
1. Al segmento de la figura se lo divide en tres partes iguales, se borra el segmento del medio y se dibujan otros dos de la misma medida, como se ve en la figura 2.
2. Se hace lo mismo con cada uno de los segmentos que quedan determinados.
3. Se continúa de la misma manera hasta que no sea posible seguir dibujando.

Como resultado de esta construcción, en cada paso el perímetro de la figura se multiplica por $\frac{4}{3}$.
Este fractal recibe el nombre de **Curva de Koch.**

Áreas dinámicas [Matemática y Física]

El movimiento browniano es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo, polen en una gota de agua). La trayectoria de una partícula en movimiento browniano fue uno de los primeros fenómenos naturales en los que se reconoció una autosimilitud a diferentes escalas de aumento.



5. Noción de fractal

Test de comprensión

27. Respondan y expliquen las respuestas.

a. La dimensión de un fractal ¿puede ser $\frac{9}{4}$?

b. La estructura de un fractal ¿se puede repetir solo un número finito de veces?

c. Una pequeña sección del fractal, ¿puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el fractal?

28. Observen la siguiente secuencia que genera la Salchicha de Minkowski y resuelvan.

Figura 1

Figura 2

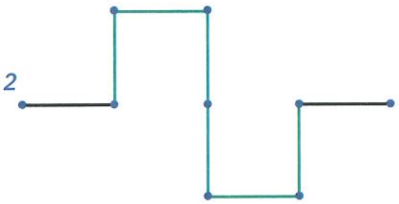
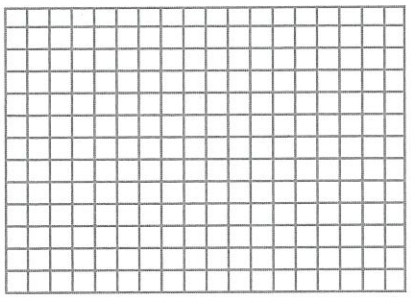


Figura 3



a. Reiteren el proceso una vez más.

b. Expliquen con sus palabras el proceso de formación del fractal.

29. Dibujen teniendo en cuenta la siguiente secuencia.

a. Dibujen un segmento (utilicen un papel afiche).

b. Dividan en tres segmentos iguales y descarten el segmento del medio.

c. Reiteren el proceso con los restantes segmentos.

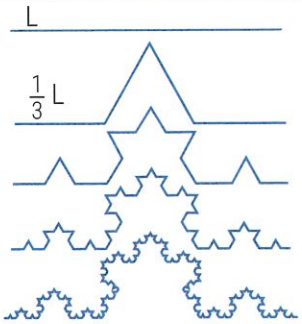
d. Comparen sus producciones con el resto de los compañeros.

DinámicaMente

Observen la figura y resuelvan teniendo en cuenta que L = 12 cm.

a. Calculen el perímetro de las primeras tres figuras.

b. Hallen una fórmula en función de L que permita calcular el perímetro.



Integración final

30. **Resuelvan lo pedido en cada caso teniendo en cuenta los puntos.**
$a = (-2; 1)$, $b = (1; 1)$ y $c = (0; 3)$

a. Hallen las componentes de $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ba}$.

b. Resuelvan analítica y gráficamente $\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$ y $\frac{1}{2}(\vec{c} + 3\vec{b})$.

c. Calculen el módulo de $|\overrightarrow{bc}|$, $|\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac}|$ y $|\overrightarrow{ba}| + |\overrightarrow{ac}|$.

31. **Hallen el valor de k en cada caso.** Para recordar pág. 19

a. $v = (k; 4)$, $w = (6; k + 5)$ y $|\overrightarrow{vw}| = 5$. Indiquen si ese valor es único y comprueben gráficamente.

b. $\vec{u} = (k; 2)$ es linealmente dependiente con $\vec{v} = (k + 1; -1)$.

c. $\vec{u} = (k - 4; 2)$ y $\vec{v} = (k; 2)$ son perpendiculares. Indiquen si ese valor es único.

32. **Hallen los componentes de $\vec{x}$ para que se verifiquen las siguientes igualdades.**
$\vec{u} = (0; -2)$; $\vec{v} = (-1; 4)$; $\vec{w} = (-3; 2)$

a. $3\vec{v} - \vec{u} + \vec{x} = 0$

b. $\vec{u} + 3(\vec{w}\,i - \vec{w}\,j) = 2\vec{x} - \vec{v}$

c. $\vec{x} - (\vec{u} - \vec{w}) = 2\vec{w}$

d. $\frac{1}{2}(-\vec{u} - \vec{w}) = 2\vec{x}$

33. **Marquen la respuesta correcta.**

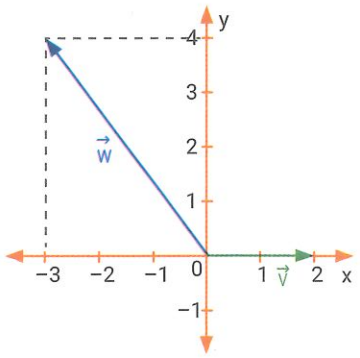
a. Un vector paralelo a $\vec{v} + 3\vec{w}$ es:

- $3\vec{w}$ ☐
- $2\vec{v} + 6\vec{w}$ ☐
- $2\vec{v}$ ☐

b. $\vec{v} = (-3; 2)$ es perpendicular al vector:

- $\vec{w} = (2; -3)$ ☐
- $\vec{w} = (2; 3)$ ☐
- $\vec{w} = (3; -2)$ ☐

34. **Observen el siguiente gráfico y resuelvan.**



a. Las componentes de $\vec{v} - \vec{w}$.

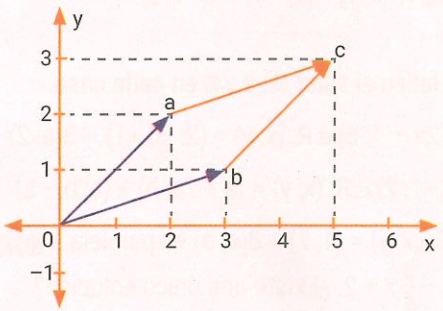
b. El módulo de cada vector.

c. $\vec{v} \cdot \vec{w} =$

d. $\vec{v} \cdot (-\vec{w}) =$

e. El ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

35. **Reúnanse con un compañero y resuelvan.**



a. Demuestren que $\overrightarrow{oa}$ es equipolente a $\overrightarrow{bc}$, y $\overrightarrow{ac}$ es equipolente a $\overrightarrow{ob}$.

b. Calculen el perímetro del oabc.

c. Calculen los ángulos internos del oabc.

36. **Grafiquen el triángulo abc, sabiendo que $a = (5; 2)$, $b = (3; 0)$ y $c = (1; 6)$.**

a. Demuestren que es rectángulo.

b. Calculen el área.

37. Indiquen si los siguientes puntos pertenecen a R: (x; y) = k.(4; −1) + (5; 1). En caso afirmativo, indiquen el valor de k.

a. (10; 2)

b. (1; 2)

c. (5; 1)

d. (7; 0,5)

38. Hallen la ecuación vectorial de cada una de las siguientes rectas.

a. A: pasa por a = (2; −1) y tiene la misma dirección que $\vec{v}$ = (1; 2).

b. B: pasa por el origen de coordenadas y es paralela a $\vec{v}$ = (3; −1).

c. C: pasa por b = (−1; 3) y es paralela a la recta $\frac{y}{2} + 1 = 2x + 2$.

d. D: pasa por q = (3; −2) y tiene pendiente $-\frac{3}{4}$.

e. E: es paralela al vector $\vec{u} = \sqrt{3}\,\vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j}$ y pasa por p = (2; 2).

f. F: pasa por p = (−2; 5) y es perpendicular a la recta R: (x; y) = (2; −1) + k(−1; 3).

39. Hallen el valor de a y b en cada caso.

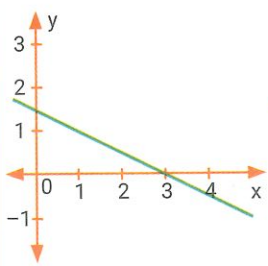
a. (2a − 1; 6) ∈ R: (x; y) = (2; 5b +1) − 3(a; 2)

b. (−1; 2) ∈ R: (x; y) = (a + 2b; b) + (a; b − a)

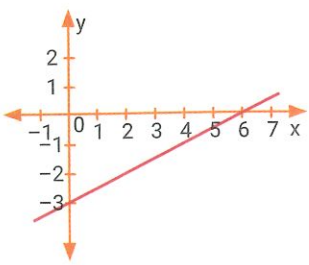
c. R: (x; y) = (1; 2) + 3(a; b) es paralela a la recta $y = -\frac{3}{4}x + 2$. ¿Existe una única solución?

40. Marquen con una X lo pedido en cada caso.

a. El gráfico correspondiente a R: (x; y) = k(−2; 1) + (3; 0).



☐

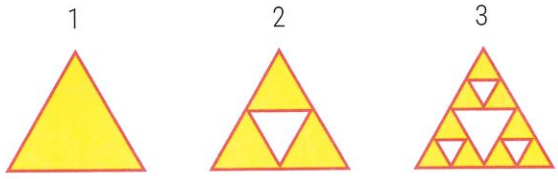


☐

b. Una recta perpendicular a R: (x; y) = k(−2; 1) + (3; 0).

- $y = -\frac{1}{2}y + 2$ ☐
- $y = 2x + 2$ ☐
- $y = \frac{1}{2}y + 2$ ☐

41. Observen la siguiente secuencia y resuelvan.



Perímetro$_1$ = 3; área$_1$ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$

a. Calculen el número de triángulos sombreados de cada uno de los sucesivos pasos y escriban la sucesión que se forma.

Para recordar pág. 19

b. ¿Qué tipo de sucesión es?

c. Escriban su término general.

d. Calculen cuántos triángulos sombreados se generarán cuando hayan aplicado 20 veces el mismo procedimiento.

e. Calculen el perímetro y el área de las cuatro primeras figuras.

Cantidad de triángulos sombreados	Perímetro de triángulos sombreados	Área de triángulos sombreados
1	3	0,43
2		
3		
4		

f. Indiquen qué sucede con el perímetro y con el área de la figura sombreada a medida que crece el número de veces que aplicamos el procedimiento.

g. Hallen una fórmula que permita calcular el área en función de A_1.

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Propiedad conmutativa de una operación en un conjunto dado

A es un conjunto y "$\star$" es una operación definida en ese conjunto → $a \in A; b \in A$, entonces $a \star b = b \star a$.

Razones trigonométricas definidas en un triángulo rectángulo

$$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto al } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente al } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto al } \hat{\alpha}}{\text{cateto adyacente al } \hat{\alpha}}$$

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$\text{Hipotenusa}^2 = \text{Cateto}_1^2 + \text{Cateto}_2^2$$

Ecuación explícita de la recta

$y = mx + b$ → donde **m** es la pendiente y **b** es la ordenada al origen.

Condición de paralelismo entre rectas

$y_1 = m_1x + b \wedge y_2 = m_2x + c$

$m_1 = m_2 \Leftrightarrow y_1 \,//\, y_2$

TIP

$\Leftrightarrow$ significa si y solo si.

Condición de perpendicularidad entre rectas

$y_1 = m_1x + b$ e $y_2 = m_2x + c$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Leftrightarrow y_1 \perp y_2$$

Resolución sistema de ecuaciones. Método de igualación

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases} \qquad ax + b = cx + d \Rightarrow x = \frac{d - b}{a - c}$$

→ para hallar el valor de y se reemplaza x en cualquiera de las dos ecuaciones.

Resolución ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sucesión

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números, uno a continuación del otro.
Se denomina **sucesión aritmética** a aquella en la cual cada término de la misma se obtiene sumando al anterior un número constante **r** llamado razón aritmética.
Se denomina **sucesión geométrica** a aquella en la cual cada término de la misma se obtiene multiplicando al anterior por un número constante **q** llamado razón geométrica.

1 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

42. Si m = (−2; −1); n = (3; 2), ¿cuáles son las componentes de $\overrightarrow{mn}$?

◯ (5; 3) ◯ (1; 1) ◯ (−5; −3)

43. Si $\vec{v}$ = (3; −2), $\vec{w}$ = (k − 3; k + 1) y $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{w}$, ¿cuál es el valor de k?

◯ k = 3 ◯ $k = \frac{5}{3}$ ◯ $k = \frac{3}{5}$

44. Si $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{a} + \vec{b}|$ ¿es igual que 7, menor o igual que 7 o mayor que 7?

◯ $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$ ◯ $|\vec{a} + \vec{b}| \leq 7$ ◯ $|\vec{a} + \vec{b}| > 7$

45. ¿Cuál es el valor de k para que a = (2; −1); b = (3; 2); c = (k; 0) estén alineados?

◯ $k = \frac{7}{3}$ ◯ $k = \frac{1}{3}$ ◯ $k = -\frac{7}{3}$

46. ¿Cuál es la pendiente de la recta R: (x; y) = (−3; 2) + α . (−1; 5)?

◯ $\frac{1}{5}$ ◯ 5 ◯ −5

47. ¿Cuál es la ecuación explícita de la recta R: (x; y) = (0; 5) + α . (1; −3)?

◯ y = −3x ◯ y = −3x + 5 ◯ $y = \frac{1}{3}x + 5$

48. ¿Cuál es el producto escalar entre $\vec{v}$ = (3; −1) y $\vec{w}$ = (−3; 1)?

◯ 0 ◯ −10 ◯ 9

49. Los fractales ¿son autosemejantes a cualquier escala?

◯ Siempre. ◯ A veces. ◯ Nunca.

2 Números complejos

6. El conjunto de los números complejos

▶ SABERES DINÁMICOS

Los números complejos

La radicación de base negativa e índice par no tiene solución en el conjunto de los números reales ($\sqrt{-1}$; $\sqrt{-25}$; $\sqrt[4]{-164}$), ya que no existe ningún número real que elevado a una potencia par dé por resultado un número negativo.

Se define un nuevo número, llamado **i**, cuyo cuadrado es igual a −1: $i^2 = -1 \Rightarrow i = \pm\sqrt{-1}$.

Dicho número **i** es la unidad imaginaria en el conjunto de los números complejos $(\mathbb{C})$.

$$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x_{1;2} = \pm\sqrt{-9} \Rightarrow x_{1;2} = \pm 3i$$

Expresión binómica de un complejo

$z = a + bi$, siendo **a** la **parte real** [Re(z) = a] y **b** la **parte imaginaria** [Im(z) = b].

- Un **número real** es un número complejo con parte imaginaria igual a cero. Ejemplo: z = 5.
- Un **número imaginario puro** es un número complejo con parte real igual a cero. Ejemplo z = 8i.

Complejos conjugados

Dado un complejo **z**, se define como su **conjugado** $\bar{z}$, al complejo que tiene su parte real igual y su parte imaginaria opuesta.

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z_1 = 3 - 4i \Rightarrow \bar{z_1} = 3 + 4i \qquad z_2 = -1 + 2i \Rightarrow \bar{z_2} = -1 - 2i$$

Las soluciones complejas de una ecuación cuadrática con coeficientes reales son **complejos conjugados**.

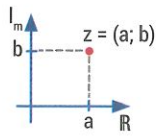
$$x^2 + 2x + 10 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 10}}{2 \,.\, 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} \Rightarrow x_1 = -1 + 3i;\ x_2 = -1 - 3i$$

Representación gráfica y expresión cartesiana de un complejo

Se define al conjunto de los números complejos $(\mathbb{C})$ como:

$$\mathbb{C} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

$z = (a; b)$ ← Expresión cartesiana
- parte imaginaria
- parte real



A cada número complejo le corresponde un punto del plano.

Áreas dinámicas [Matemática y Ciencia y Tecnología]

Los números complejos tienen importantes aplicaciones en la ciencia y la tecnología. Son muy útiles en el estudio de la relatividad, la mecánica cuántica, la corriente alterna y en vibraciones mecánicas. Son también introductorios de la teoría de funciones de variable compleja, la cual tiene gran importancia en el estudio de campos eléctricos, magnéticos y de otros tipos, mecánica de fluidos, mecánica de suelos y de sólidos.

ACTIVIDADES

6. El conjunto de los números complejos

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. La raíz cuadrada de un número real, ¿es siempre un número real?

b. El conjugado del conjugado de z, ¿es el mismo z?

c. ¿Es cierto que si $\sqrt{-k}$ es un número real, entonces $k \leq 0$?

2. Hallen los valores de x en cada caso. Luego, marquen con una X el conjunto al que pertenecen.

a. $2x^2 + 8 = 0$

$x_1 =$ _____ • Real ☐ • Complejo ☐

$x_2 =$ _____ • Real ☐ • Complejo ☐

b. $(x - 3) \cdot (x + 1) = 0$

$x_1 =$ _____ • Real ☐ • Complejo ☐

$x_2 =$ _____ • Real ☐ • Complejo ☐

c. $x^2 - 2x = -10$

$x_1 =$ _____ • Real ☐ • Complejo ☐

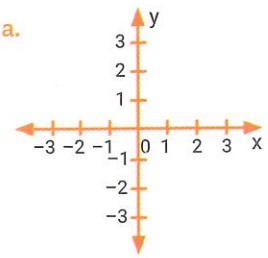
$x_2 =$ _____ • Real ☐ • Complejo ☐

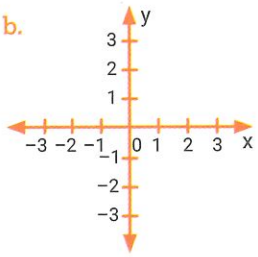
d. $x^2 - 5x + 6 = 0$

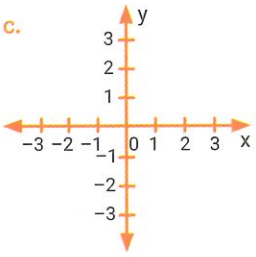
$x_1 =$ _____ • Real ☐ • Complejo ☐

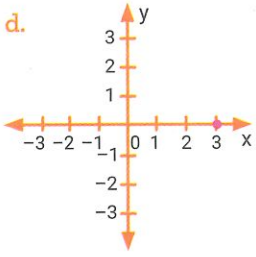
$x_2 =$ _____ • Real ☐ • Complejo ☐

3. Representen en un sistema de ejes las soluciones obtenidas en cada ítem de la actividad anterior.

a. 

b. 

c. 

d. 

4. Hallen el valor de a y b para que los complejos sean iguales.

a. $3 - ai = (b + 1) + 5i$

a = _____ b = _____

b. $(a - b) + (3b - 1)i = 2i - 4$

a = _____ b = _____

c. $(2a - 3b) + (b + 4a)i = -1 - 2i$

a = _____ b = _____

5. Completen con la componente correspondiente de modo que el complejo z pertenezca a las rectas indicadas.

a. La bisectriz del primer cuadrante. $z = 3 +$ ☐ i

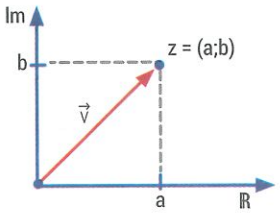
b. La recta de ecuación $y = -3x$. $z =$ ☐ $- i$

7. Módulo de un complejo. Forma polar y trigonométrica

▶ SABERES DINÁMICOS

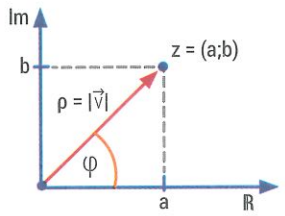
Módulo de un complejo

A cada número complejo z = (a; b) le está asociado un vector $\vec{v}$ con origen en el punto (0; 0) y extremo en el punto (a; b).
De este modo se puede hacer corresponder un vector a cada número complejo.
El módulo de ese vector es el **módulo del complejo** y se representa con la letra **ρ**.



$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El ángulo que forma ese vector con el eje positivo x es el argumento y se representa con la letra φ.
Es importante identificar en qué cuadrante se ubica el vector asociado al número complejo y, luego, obtener el ángulo real correspondiente.



$$\hat{\varphi} = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}$$

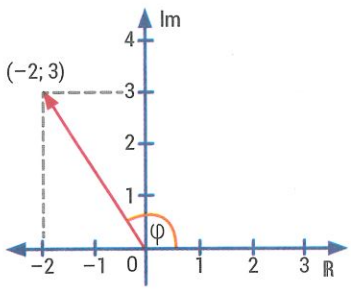
$z = -2 + 3i \Rightarrow \rho = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\hat{\varphi} = \text{arc tg}\left(-\frac{3}{2}\right) = \hat{\varphi} = -56° 18' 35''$

Como z pertenece al segundo cuadrante:

$\hat{\varphi} = 180° - 56° 18' 35'' = 123° 41' 24''$

Para recordar pág. 41



Forma polar y trigonométrica de un complejo

Conocidos el módulo ρ y el argumento $\hat{\varphi}$ de un número complejo (z = a + bi), este puede expresarse en forma polar y en forma trigonométrica.

$$a = \rho \,.\, \cos\hat{\varphi} \qquad b = \rho \,.\, \text{sen}\,\hat{\varphi}$$

Forma polar	Forma trigonométrica
$(\rho; \hat{\varphi})$	$\rho \,.\, (\cos\hat{\varphi} + i\,\text{sen}\,\hat{\varphi})$

a. *Expresen el número complejo z = 3 + 2i en forma polar y en forma trigonométrica.*

$\rho = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \rho = \sqrt{13}$ *$\hat{\varphi} = \text{arc tg}\,\frac{2}{3} = 33° 41' 24''$*

Forma polar: ***$z = (\sqrt{13}; 33° 41' 24'')$***

Forma trigonométrica: ***$z = \sqrt{13} \,.\, (\cos 33° 41' 24'' + i \,\text{sen}\, 33° 41' 24'')$***

b. *Expresen en forma binómica y cartesiana el número complejo $z = 2 \,.\, (\cos 120° + i \,\text{sen}\, 120°)$.*

$\cos 120° = -0{,}5$ *$\text{sen}\, 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = 2 \,.\, \left(-0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \Rightarrow z = -1 + \sqrt{3}\, i \Rightarrow$* ***$z = (-1 ; \sqrt{3})$***

ACTIVIDADES

7. Módulo de un complejo. Forma polar y trigonométrica

Test de comprensión

6. Respondan y expliquen las respuestas.

a. El módulo de un número complejo y el de su conjugado, ¿tienen distinto valor?

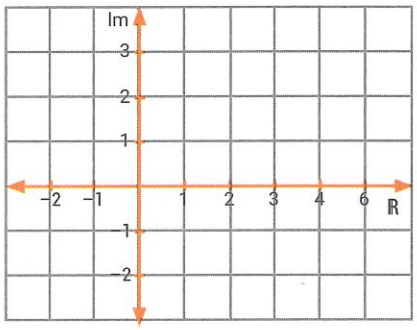
b. La expresión polar de $z = (-1; 0)$ ¿es $z = (1; 180°)$?

c. Si $\text{Im}(z) = 1$ y $|z| = \sqrt{2}$, ¿es posible que $\text{Re}(z) = -1$?

7. **Resuelvan.**

a. Ubiquen los números complejos e indiquen de qué manera están expresados.

- $z_1 = -2 + 3i$ Forma: _____
- $z_2 = (1; -1)$ Forma: _____
- $z_3 = (5; 0°)$ Forma: _____
- $z_4 = 1 + i$ Forma: _____
- $z_5 = (2; 135°)$ Forma: _____
- $z_6 = 2 . (\cos 225° + i . \text{sen } 225°)$ Forma: _____



b. Calculen el módulo en cada caso.

- $|z_2| =$ _____
- $|z_6| + |\overline{z_6}| =$ _____

8. **Hallen los valores de "k" posibles y de $\hat{\varphi}$ en cada caso.**

a. $-3 + 4i = (k; \hat{\varphi})$

b. $|(-2k + 1 - i)| = \sqrt{10}$

c. $k . (\cos \hat{\varphi} + i . \text{sen } \hat{\varphi}) = \sqrt{3} - i$

9. **Reúnanse en grupo y hallen lo pedido en cada caso.**

Para recordar pág. 41

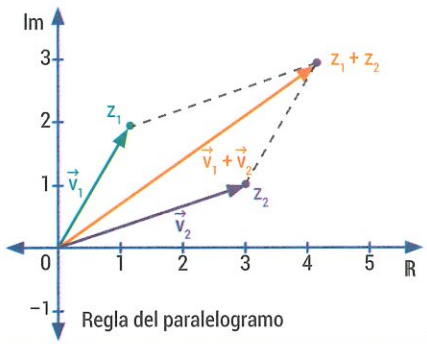
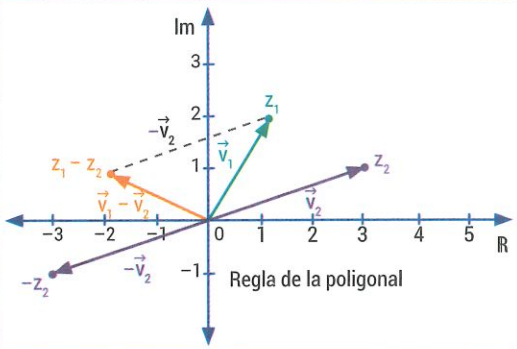
a. Los valores de k para que "$x^2 - k = 0$" tenga raíces imaginarias.

b. Los valores de k para que "$x^2 + x + k = 0$" tenga raíces reales.

8. Adición y sustracción

▶ SABERES DINÁMICOS

Adición y sustracción de números complejos en forma gráfica

Suma	Resta
Para sumar gráficamente dos números complejos ($z_1 + z_2$), se suman sus vectores asociados. El extremo del vector suma determina $z_1 + z_2$.	Para restar gráficamente dos números complejos ($z_1 - z_2$), se restan sus vectores asociados. El extremo del vector resta determina $z_1 - z_2$.
	

Adición y sustracción de números complejos en forma analítica

Para **sumar o restar dos números complejos como pares ordenados**, se suman o restan las componentes reales e imaginarias, respectivamente.

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d) \qquad (a; b) - (c; d) = (a - c; b - d)$$

$$(-2; 5) + (1; 4) = (-2 + 1; 5 + 4) = (-1; 9) \qquad (-2; 5) - (1; 4) = (-2 - 1; 5 - 4) = (-3; 1)$$

Para **sumar o restar dos números complejos en forma binómica**, se suman o restan las partes reales e imaginarias, respectivamente.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \qquad (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(3 - 5i) + (1 - 4i) = (3 + 1) + (-5 - 4)i = 4 - 9i \qquad (5 + 2i) - (3 - 5i) = (5 - 3) + (2 + 5)i = 2 + 7i$$

Adición y sustracción de complejos conjugados

La **suma de dos complejos conjugados** es igual al duplo de la componente real.

$$(a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a$$

$$(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = (-2 - 2) + (3 - 3)i = 2 \cdot (-2) = -4$$

La **resta de dos complejos conjugados** es igual al duplo de la componente imaginaria.

$$(a + bi) - (a - bi) = (a - a) + [b - (-b)]i = 2bi$$

$$(-2 + 3i) - (-2 - 3i) = [-2 - (-2)] + [3 - (-3)]i = 2 \cdot 3i = 6i$$

ACTIVIDADES

8. Adición y sustracción

Test de comprensión

10. Respondan y expliquen las respuestas.

a. El conjugado del opuesto de un número complejo, ¿es el mismo número complejo?

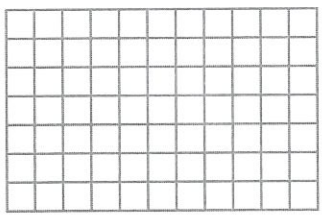
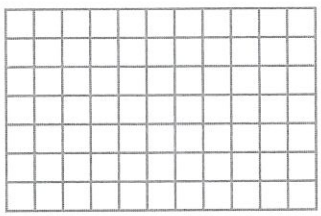
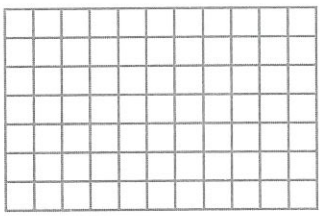
b. El valor de "a" para que $(-3a - 2) + 5i$ sea un número imaginario puro, ¿es $a = \frac{2}{3}$?

c. El conjugado de la suma de dos complejos ¿es igual a la suma de los conjugados de cada uno? Si es así, escriban un ejemplo.

11. Resuelvan analítica y gráficamente las operaciones pedidas en cada caso.

$z_1 = 2 + 3i$ $z_2 = -5 + i$ $z_3 = 2i$ $z_4 = -3$

a. $z_1 + z_2 =$ **b.** $2 . (z_4 - z_3) =$ **c.** $z_3 + z_4 - z_1 =$

12. Hallen el valor del número complejo "z" en cada caso.

a. $(-3 + 2i) - z = (4 - 2i) - (-3 + i)$

b. $(2 - 4i) + 3 . (1 - i) = \bar{z}$

c. $(1 + 5i) + z - (2 - 3i) = -6i$

d. $(1 + 7i) + (-8i) = z + 2$

13. Hallen el valor de "a" y "b" en cada caso.

a. $(-3 + i) . a = 1 + 2i - (-2 + bi)$

b. $\overline{3 + ai} = (b + 1) . \left(1 - \frac{1}{6}i\right)$

14. Hallen el valor de z_1 y z_2 en cada caso.

a. $z_1 + z_2 = 5$ $z_1 = 3i + z_2$

b. $z_1 + z_2 = 1 - i$ $z_1 - z_2 = 3 + 7i$

15. Hallen los valores de $x \in \mathbb{C}$ en cada caso.

a. $x^2 + \frac{1}{4} = 0$

b. $x \cdot (3x - 12) = -15$

16. Representen los siguientes números complejos y expresen de la forma indicada en cada caso.

a. $z_1 = 2 - 1\,i$ en forma polar.

b. $z_2 = (\sqrt{3}; 2)$ en forma trigonométrica.

c. $z_3 = (-1; -2)$ en forma polar.

d. $z_4 = 2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$ en forma binómica.

17. Escriban en forma binómica un número complejo que cumpla la condición dada en cada caso.

a. La suma entre la componente real y la imaginaria es $\frac{3}{2}$ y la diferencia es $\frac{5}{2}$.

b. El producto entre la componente real y la imaginaria es -6 y la suma es -1. ¿Existe una única posibilidad?

c. El módulo es $\sqrt{10}$ y la componente imaginaria es -3. ¿Existe una única posibilidad?

18. Completen la siguiente tabla.

z	$-z$	$\bar{z}$	$-\bar{z}$
$-3 - \frac{1}{2}i$			
		$2 - 5i$	
	$\frac{1}{4} - \sqrt{2}i$		
			$-\frac{1}{2} + 3i$
	$5i$		
		-4	

19. Hallen los valores de "x" e "y" para que se cumplan las igualdades.

a. $(2x; 0{,}5) = (2; y - 3)$

b. $3 \cdot (x - 2i) = (-y + x) + (y + 1)i$

c. $(2x - 3y) + (x + y)\,i = -i$

20. Resuelvan.

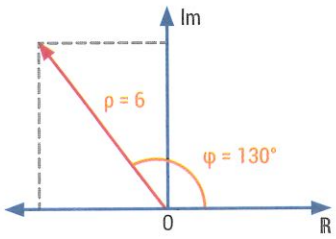
a. $\hat{\varphi} = 30°$; la componente real es $\sqrt{3}$. ¿Cuál es el número complejo?

b. $\hat{\varphi} = 330°$; la componente imaginaria es -2. Expresen el número complejo en forma trigonométrica.

c. $z = -3 + k\,i$; $\hat{\varphi} = 225°$. ¿Cuál es el valor de k?

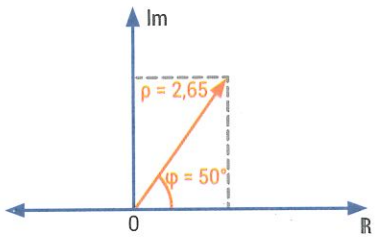
21. Observen la representación de los números complejos y escriban su expresión binómica.

a.



Forma binómica:

b.



- Forma binómica:

22. Tengan en cuenta los siguientes números complejos y resuelvan lo pedido en cada caso.

$z_1 = (3; -4)$; $z_2 = 4 \cdot (\cos 150° + i \cdot \operatorname{sen} 150°)$; $z_3 = (2; 330°)$

a. Expresen los números complejos en forma binómica.

b. Resuelvan analíticamente.

- $z_1 - z_2 + z_3 =$
- $2z_3 + z_2 =$
- $(z_1 - z_3) - \frac{1}{2}z_2 =$
- $-z_3 + \overline{z_2} =$

23. Resuelvan en forma analítica.

a. $(-2; 3) + (1; -4) =$

b. $(-1; 5) - (-2; 3) =$

c. $(-3 - 3i) + \overline{(-3 - 3i)} =$

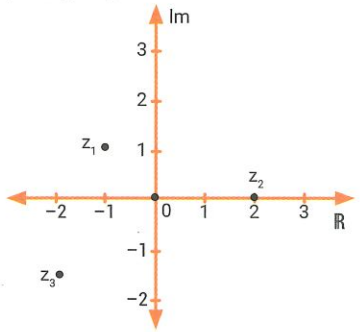
d. $2 . (5; -1) - 3 . (-1; 1) =$

e. $4 - (3 - 2i) =$

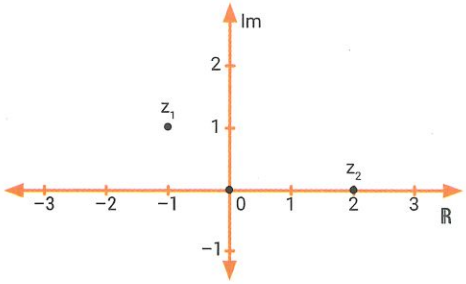
f. $(2 - 2i) - \frac{1}{2} . (-2 + 4i) =$

24. Resuelvan gráficamente.

a. $z_1 - (z_2 + z_3) =$



b. $z_1 - \frac{1}{2} . z_2 =$



25. Hallen los valores de "x" e "y" para que se cumplan las igualdades.

a. $(2x; -0,5) - 2 . (1; y + 3) = (0; 0)$

b. $(-2x + 5i) - (yi + 2) = 6 - 3i$

c. $2 - 8i - y + 6i = y - xi$

d. $2x + 17i - (4 - 2i) - 2 = -yi$

26. Hallen el valor de "z" que verifique las siguientes igualdades.

a. $2 - 0,2i + 4z = 1 + 0,8i$

b. $3 + z + \overline{z} = 2 \wedge z - \overline{z} - 3i = 2i$

27. Calculen sabiendo que: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -1 - i$.

a. $|z_1 + z_2| =$

b. $|z_1| + |\overline{z_2}| =$

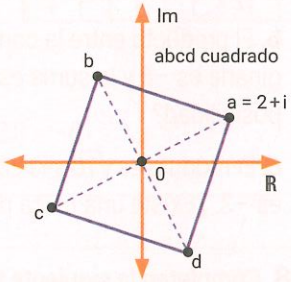
c. $|-z_1 + \overline{z_1}| =$

d. $|\overline{z_1}| + |z_2| =$

28. Completen la tabla.

Número complejo	Forma polar	Forma binómica
z_1	$(1; 60°)$	
z_2		$1 - \sqrt{3}i$
$2 . z_1$		
$\overline{z_2}$		
$z_1 + z_2$		
$z_1 + \overline{z_2}$		

29. Reúnanse con un compañero, observen el siguiente gráfico y respondan.



a. Completen la tabla.

Número complejo	Forma cartesiana	Forma polar
a		
b		
c		
d		

b. Resuelvan gráficamente: $a + c - d$.
¿Qué vértice se obtiene?

c. Calculen el perímetro y el área del cuadrado.

30. Lean atentamente y resuelvan.
La resta de las componentes imaginarias de dos números complejos conjugados es 8, y la suma de sus módulos es 10. Determinen esos complejos en la forma binómica.

9. Potencias de i. Cuadrado y cubo de un complejo

▶ SABERES DINÁMICOS

A través de las propiedades de la potenciación, se puede hallar la potencia enésima de la unidad imaginaria i.

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$	$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$	$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = 1$	$i^9 = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i$	$i^{10} = i^9 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$	$i^{11} = i^{10} \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4k} = 1$ $k \in \mathbb{N}_0$	$i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4k+1} = i$ $k \in \mathbb{N}_0$	$i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4k+2} = -1$ $k \in \mathbb{N}_0$	$i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4k+3} = -i$ $k \in \mathbb{N}_0$

Los **resultados de las potencias de i** son 1, i, −1 y −i, y se repiten periódicamente.

Para recordar pág. 41

El resultado de elevar la unidad imaginaria a un número natural "n" es igual a elevarlo al resto de la división entera entre n y 4.

$$i^n = i^{4c+r} = \underbrace{(i^4)^c}_{1} \cdot i^r \quad i^n = i^r \qquad \begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & c \end{array}$$

$i^{37} = i^1 = i$

$$\begin{array}{r|l} 37 & 4 \\ \hline 1 & 9 \end{array}$$

$i^{91} = i^3 = -i$

$$\begin{array}{r|l} 91 & 4 \\ \hline 3 & 22 \end{array}$$

$i^{126} = i^2 = -1$

$$\begin{array}{r|l} 126 & 4 \\ \hline 2 & 31 \end{array}$$

$i^{44} = i^0 = 1$

$$\begin{array}{r|l} 44 & 4 \\ \hline 0 & 11 \end{array}$$

Cuadrado y cubo de un complejo

Para **elevar al cuadrado o al cubo un complejo**, se desarrolla el cuadrado o el cubo de un binomio.

$$(3 + 2i)^2 = 3^2 + 2.3.2i + (2i)^2$$
$$= 9 + 12i + 4i^2$$
$$= 9 + 12i + 4.(-1)$$
$$= \mathbf{5 + 12i}$$

$$(1 - 3i)^2 = 1^2 + 2.1.(-3i) + (-3i)^2$$
$$= 1 - 6i + 9i^2$$
$$= 1 - 6i - 9$$
$$= \mathbf{-8 - 6i}$$

$$(2 + i)^3 = 2^3 + 3.2^2 i + 3.2i^2 + i^3$$
$$= 8 + 12i - 6 - i$$
$$= \mathbf{2 + 11i}$$

$$(1 - i)^3 = 1^3 + 3.1^2.(-i) + 3.1.(-i)^2 + (-i)^3$$
$$= 1 - 3i - 3 + i$$
$$= \mathbf{-2 - 2i}$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/poti * para mirar un video explicativo de las potencias de i.

*Enlace acortado de https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:complex/x2ec2f6f830c9fb89:imaginary/v/calculating-i-raised-to-arbitrary-exponents

ACTIVIDADES

9. Potencias de i. Cuadrado y cubo de un complejo

Test de comprensión

31. Respondan y expliquen las respuestas.

a. La potencia de un número imaginario, ¿es siempre otro número imaginario?

b. ¿Es cierto que $i^{12} \cdot i^5$ es igual a $i^{12.5}$?

c. ¿Es cierto que $(i^4)^{25} = i^{4k+16}$?

32. Marquen con una X la respuesta correcta en cada caso.

a. ¿Cuál es el valor de i^{19}?

• 1 ☐ • −1 ☐ • i ☐ • −i ☐

b. ¿Cuál es el valor de i^{28}?

• 1 ☐ • −1 ☐ • i ☐ • −i ☐

c. ¿Cuál es el valor de i^{35}?

• 1 ☐ • −1 ☐ • i ☐ • −i ☐

33. Expresen como una única potencia de i y resuelvan.

a. $i^3 \cdot i^2 \cdot i =$ _____

b. $i^{10} : i^6 =$ _____

c. $i^{15} \cdot i^3 : i^{17} =$ _____

d. $[(i^{34})^0]^{45} =$ _____

e. $(i^{18} : i^{16}) \cdot (i^7 : i^6) =$ _____

f. $(i^8 \cdot i^{12}) : (i^5 \cdot i^{10}) =$ _____

34. Hallen la potencia de i en cada caso, sabiendo que $k \in \mathbb{N}_0$.

a. $i^{4k+1} =$ _____

b. $(i^{4k+2})^2 =$ _____

c. $(i^{2k+3})^2 \cdot i =$ _____

d. $i^k \cdot i^{k+3} \cdot i^{2k} =$ _____

35. Resuelvan, sabiendo que $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 1 - 2i$.

a. $i^5 + z_2 =$ _____

b. $z_1^2 =$ _____

c. $z_2^2 - 2z_1 =$ _____

d. $(z_1 + \overline{z_2})^2 =$ _____

e. $z_1^3 - 2z_2 =$ _____

f. $(z_1^2)^3 : z_1^4 + z_2 =$ _____

36. Hallen el valor de "a" y de "b" para que se cumplan las siguientes igualdades.

a. $(a - 3i)^2 = 5b - 24i$

b. $(4a + i)^2 = 9b + 16i$

10. Multiplicación y división

▶ SABERES DINÁMICOS

Multiplicación de complejos

• Para **multiplicar dos números complejos en forma binómica** se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma (o resta).

$$(a + bi) \,.\, (c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = ac + adi + cbi - bd = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

$$(4 + 3i).(2 - 5i) = 4.2 - 4.5i + 3i.2 - 3i.5i = 8 - 20i + 6i - 15i^2 = 8 - 14i - 15.(-1) = \mathbf{23 - 14i}$$

• El **producto de dos complejos en forma trigonométrica** es otro complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y su argumento es la suma de los argumentos de los complejos dados.

$z_1 = \rho_1 \,.\, (\cos \hat{\varphi}_1 + i \,.\, \text{sen}\, \hat{\varphi}_1) \wedge z_2 = \rho_2 \,.\, (\cos \hat{\varphi}_2 + i \,.\, \text{sen}\, \hat{\varphi}_2)$

Entonces, $z_1 \,.\, z_2 = (\rho_1 \,.\, \rho_2) \,.\, [\cos (\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2) + i \,.\, \text{sen}\, (\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2)]$

$z_1 = 2 \,.\, (\cos 20° + i \,.\, \text{sen}\, 20°) \wedge z_2 = 5 \,.\, (\cos 80° + i \,.\, \text{sen}\, 80°)$

$z_1 \,.\, z_2 = 2 \,.\, 5 \,.\, [\cos (20° + 80°) + i\, \text{sen}\, (20° + 80°)]$

$z_1 \,.\, z_2 = \mathbf{10 \,.\, (\cos 100° + i\, \text{sen}\, 100°)}$

• El **producto de dos números complejos conjugados** es igual a la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria.

$z \,.\, \bar{z} = (a + bi) \,.\, (a - bi) \Rightarrow z \,.\, \bar{z} = a^2 - (bi)^2 \Rightarrow z \,.\, \bar{z} = a^2 - b^2 \,.\, i^2 \Rightarrow z \,.\, \bar{z} = a^2 - b^2 \,.\, (-1) \Rightarrow z \,.\, \bar{z} = a^2 + b^2$

$$(4 - 2i).(4 + 2i) = 4^2 - (2i)^2 = 16 - 4i^2 = 16 + 4 = \mathbf{20}$$

División de complejos

• Para **dividir dos números complejos en forma binómica** se multiplican el divisor y el dividendo por el conjugado de este último y luego se resuelven las operaciones resultantes.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$

$$\frac{2 + i}{1 - 3i} = \frac{2 + i}{1 - 3i} \cdot \frac{1 + 3i}{1 + 3i} = \frac{2 + 6i + i + 3i^2}{1 - (3i)^2} = \frac{-1 + 7i}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$

• El **cociente de dos complejos en forma trigonométrica** es otro complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y su argumento es la diferencia de los argumentos de los complejos dados.

$z_1 = \rho_1 \,.\, (\cos \hat{\varphi}_1 + i \,.\, \text{sen}\, \hat{\varphi}_1) \wedge z_2 = \rho_2 \,.\, (\cos \hat{\varphi}_2 + i \,.\, \text{sen}\, \hat{\varphi}_2)$

Entonces, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \,.\, [\cos (\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2) + i \,.\, \text{sen}\, (\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2)]$

$z_1 = 15 \,.\, (\cos 120° + i \,.\, \text{sen}\, 120°) \wedge z_2 = 3 \,.\, (\cos 80° + i \,.\, \text{sen}\, 80°)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{15}{3} \,.\, [\cos (120° - 80°) + i\, \text{sen}\, (120° - 80°)]$

$\frac{z_1}{z_2} = \mathbf{5 \,.\, (\cos 40° + i\, \text{sen}\, 40°)}$

ACTIVIDADES

10. Multiplicación y división

Test de comprensión

37. Respondan y expliquen las respuestas.

a. El producto entre dos números imaginarios puros ¿es otro número imaginario puro?

b. Si $z_1 = (2; 30°)$; $z_2 = \left(\frac{1}{2}; 120°\right)$, entonces ¿$z_1 . z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$?

c. Si $z = 2.(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$, ¿$z^2 = 4i$?

38. Resuelvan las siguientes operaciones.

a. $i.(3 - i^4)^2 =$ _____

b. $(-3 - i).(2 + i) =$ _____

c. $(\sqrt{2} + \sqrt{3}i).(\sqrt{3} - \sqrt{2}i) =$ _____

d. $(\sqrt{2} + \sqrt{8}i)^2 =$ _____

e. $(-2 + i^3).(1 + 2i^5) =$ _____

f. $(i^{24} + i^{25}).i^{27} =$ _____

39. Tengan en cuenta los números complejos y resuelvan.

$z_1 = 2.(\cos 60° + i.\operatorname{sen} 60°)$ $\quad z_3 = 3.(\cos 110° + i.\operatorname{sen} 110°)$

$z_2 = 2.(\cos 45° + i.\operatorname{sen} 45°)$ $\quad z_4 = 4.(\cos 315° + i.\operatorname{sen} 315°)$

a. $z_1 . z_3 =$ _____

b. $z_2 . z_4 =$ _____

c. $z_1 . z_3 . z_4 =$ _____

d. $z_1 . \overline{z_4} =$ _____

e. $z_4 : z_2 =$ _____

f. $z_2 : z_1 =$ _____

40. Resuelvan las siguientes operaciones.

a. $\frac{(1 + 2i)^2}{2i} =$ _____

b. $\frac{-2i}{3 - 2i} =$ _____

c. $\frac{(1 + i).(2 - i)}{3 - i} =$ _____

d. $\frac{(1 - 2i)^3}{i^7} =$ _____

41. Hallen el valor de "z" en cada caso.

a. $z.i = 2$ _____

b. $(2 - i).z = -3$ _____

c. $\frac{3 - 2i}{z} = 3 + 2i$ _____

d. $(z - 1).(1 + i) = 2 - i$ _____

10. Multiplicación y división

42. Hallen los valores pedidos en cada caso.

a. Los valores de x para que: $(x + 3i) \cdot (x - 3i) = 13$.

b. El valor de a para que: $(3 + ai)^2$ sea imaginario puro.

c. Los valores de a y b para que: $(-4 + 2i) \cdot a - 2 = (-6 + b) - 4i$.

d. El valor de a para que el producto entre $a - 5i$ y su conjugado sea igual a 41.

e. El valor de a para que $z = \frac{3 + ai}{1 + i}$ sea un número real.

f. Los valores de a y b para que $\frac{a + 2i}{i} = a + 3 + bi$.

43. Completen con el conjugado y resuelvan.

a. $(4 - 5i) \cdot (\square\square\square i) =$ _____

b. $(\square\square\square i) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) =$ _____

c. $(\square\square\square i) : (5 + 3i) =$ _____

d. $(\sqrt{18} - \sqrt{2}i) : (\square\square\square i) =$ _____

44. Resuelvan las siguientes divisiones de números complejos.

a. $z_1 = 7 \cdot (\cos 50° + i \cdot \text{sen } 50°)$ y $z_2 = 2 \cdot (\cos 35° + i \cdot \text{sen } 35°)$

$z_1 : z_2 =$ _____

b. $z_3 = (2; 120°)$ y $z_4 = (4; 90°)$

$z_3 : z_4 =$ _____

c. $z_5 = 3 - 5i$ y $z_6 = 3 + i$

$z_5 : z_6 =$ _____

d. $z_7 = -2i$ y $z_8 = 1 + 2i$

$z_7 : z_8 =$ _____

e. $z_9 = 3 - i$ y $z_{10} = 2i$

$z_9^2 : z_{10}^3 =$ _____

10. Multiplicación y división

45. Tengan en cuenta los números complejos y resuelvan las operaciones indicadas. Expresen en forma polar los resultados obtenidos.

$z_1 = 2 - 4i$ $z_2 = -1 + i$ $z_3 = 2i$

a. $z_1 \cdot z_2 =$

b. $z_1 : z_3 =$

c. $(z_2 - z_1)^2 =$

d. $z_2^3 =$

e. $z_3^2 : \overline{z_1} =$

46. Hallen el valor de $\hat{\varphi}$ para que se cumplan las condiciones pedidas en cada caso.

a. Si $z_1 = 5 . (\cos 45° + i . \text{sen } 45°)$; $z_2 = 3 . (\cos \hat{\varphi} + i . \text{sen } \hat{\varphi})$ y $z_1 . z_2$ es un número real negativo.

b. Si $z_3 = 3 . (\cos \hat{\varphi} + i . \text{sen } \hat{\varphi})$; $z_4 = 11 . (\cos 130° + i . \text{sen } 130°)$ y $z_3 . z_4$ es un número imaginario puro negativo.

c. Si $z_7 = 6 . (\cos 80° + i . \text{sen } 80°)$; $z_8 = 2 . (\cos \hat{\varphi} + i . \text{sen } \hat{\varphi})$ y $z_7 : z_8$ es un número real positivo.

d. $z_9 = (2; 220°)$; $z_{10} = (1; \hat{\varphi})$ y $z_9 . z_{10}$ es un número imaginario puro positivo.

DinámicaMente

Hallen los valores de k para que: $x^2 + kx + 4 = 0$ tenga raíces complejas.

11. Operaciones combinadas

▶ SABERES DINÁMICOS

Las **operaciones combinadas entre números complejos** se resuelven respetando la jerarquía de cada una de ellas (potencias y raíces; multiplicaciones y divisiones; sumas y restas) y considerando el orden, en caso de haber paréntesis y/o corchetes.

Dados los números enteros: $z_1 = 2 + 3i$ $z_2 = -1 + i$ $z_3 = 4 - 2i$ $z_4 = 3i$

a. Resuelvan: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 =$

$[(2 + 3i) + (-1 + i)] \cdot (4 - 2i) =$

$[1 + 4i] \cdot (4 - 2i) =$ Se resuelve la suma.

$4 - 2i + 16i + 8 =$ Se resuelve la multiplicación.

$= \mathbf{12 + 14i}$

b. Resuelvan: $\frac{z_4^2}{z_2} =$

$\frac{(3i)^2}{-1 + i} =$

$\frac{-9}{-1 + i} =$ Se resuelve la potencia.

$\frac{-9}{-1 + i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - i} =$ Se resuelve el cociente.

$\frac{9 + 9i}{2} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}i$

Se pueden realizar ciertas **operaciones combinadas en forma trigonométrica**.

$z_1 = 6 \cdot (\cos 150° + i \cdot \operatorname{sen} 150°)$ $z_2 = 3 \cdot (\cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40°)$ $z_3 = 2 \cdot (\cos 15° + i \cdot \operatorname{sen} 15°)$

Resuelvan: $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} =$

$\frac{6 \cdot (\cos 150° + i \cdot \operatorname{sen} 150°) \cdot 2 \cdot (\cos 15° + i \cdot \operatorname{sen} 15°)}{3 \cdot (\cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40°)} =$

$\frac{6 \cdot 2 \cdot [\cos (150° + 15°) + i \cdot \operatorname{sen} (150° + 15°)]}{3 \cdot (\cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40°)} =$ Se resuelve la multiplicación.

$\frac{12 \cdot (\cos 165° + i \cdot \operatorname{sen} 165°)}{3 \cdot (\cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40°)} =$

$4 \cdot [\cos (165° - 40°) + i \cdot \operatorname{sen} (165° - 40°)] =$ Se resuelve la división.

$= \mathbf{4 \cdot (\cos 125° + i \cdot \operatorname{sen} 125°)}$

ACTIVIDADES

11. Operaciones combinadas

Test de comprensión

47. Respondan y expliquen las respuestas.

a. El producto entre un número imaginario puro y su conjugado, ¿es un número imaginario puro?

b. ¿Es cierto que el conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados de cada uno de ellos? Expliquen usando ejemplos.

c. El inverso multiplicativo de $z = 3 + 2i$ ¿es $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$?

48. Tengan en cuenta los números complejos y resuelvan las siguientes operaciones combinadas.

$z_1 = 1 - 2i$ $z_2 = 3 + i$ $z_3 = 2i$

a. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 =$ _____

b. $(z_2 : z_3)^2 \cdot z_1 =$ _____

c. $z_1 \cdot z_3 - z_2 =$ _____

d. $z_1 \cdot i^{59} - z_2 \cdot i^{72} =$ _____

49. Tengan en cuenta los números complejos y hallen los valores de a y b en cada caso.

$z_1 = a + 3i$ $z_2 = -2 + bi$ $z_3 = 4 - 2i$

a. $z_1 + z_2 = z_3$

b. $z_1 \cdot z_3 = z_2$

c. $z_2 : z_3 = \overline{z_1}$

d. $2z_1 - 3z_2 = z_3^2$

e. $(z_1 + \overline{z_2}) : z_3 = i^{15}$

f. $z_1 : z_3 = z_2$

50. Hallen el valor de z en cada caso.

a. $z - (4 + 5i) = 2 - 3i$ _____

b. $(1 - 2i) \cdot z = 5 + 4i$ _____

c. $\frac{z}{3 + i} = 2 - 2i$ _____

d. $5 - z \cdot \left(\frac{1}{2}i\right) = 2 + 5i$ _____

51. Hallen el valor de a que cumpla lo pedido, sabiendo que $z = \frac{2 - ai}{1 + i} \cdot i^{25}$.

a. Que z sea un número real.

b. Que z sea un número imaginario puro.

11. Operaciones combinadas

52. Reúnanse con un compañero, lean atentamente y hallen los valores de dos números complejos z_1 y z_2 que cumplan con lo pedido en cada caso.

a. La suma entre ambos es $3 + 2i$ y la diferencia, $5 - 5i$.

b. El cociente entre ambos es $2i$ y el conjugado del primero es $-2 - 4i$.

53. Calculen los valores de x para que el número $(2 + xi)^2$ sea imaginario puro.

54. Escriban un número complejo que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

a. La dirección del vector que lo representa es la bisectriz del primer cuadrante y Re + Im = 8.

b. La dirección del vector que lo representa es la de la recta $y = -3x$ y el módulo es $2\sqrt{10}$. ¿Existe una única solución?

55. Tengan en cuenta los números complejos y resuelvan las operaciones combinadas. Luego, representen el vector asociado al número complejo, que es el resultado en cada caso.

$z_1 = 4 - i$ $z_2 = (-1; -2)$ $z_3 = -1 + 4i$ $z_4 = (0; 2)$

a. $z_3 + z_1 : z_4 =$ b. $\left(\frac{1}{2} z_4 + z_2\right)^2 - z_3 =$ c. $-z_4 : 2 + 2 . z_3 =$

11. Operaciones combinadas

56. Tengan en cuenta los números complejos y resuelvan las operaciones combinadas; luego, escriban en forma binómica los resultados obtenidos.

$z_1 = 2.(\cos 120° + i.\operatorname{sen} 120°)$ $z_3 = 4.(\cos 60° + i.\operatorname{sen} 60°)$

$z_2 = 5.(\cos 30° + i.\operatorname{sen} 30°)$ $z_4 = 3.(\cos 240° + i.\operatorname{sen} 240°)$

a. $z_1 . z_2 =$

b. $z_4 : z_3 =$

c. $z_3 : z_4 =$

d. $(z_3 . z_2) : z_1 =$

57. Hallen el valor de ρ y $\hat{\varphi}$, en cada caso.

a. $(5; \hat{\varphi}).(2; 30°) = \rho.(\cos 150° + i.\operatorname{sen} 150°)$

b. $(\rho; 20° 40').(\sqrt{5}; 35° 20') = (2.\sqrt{10}; \hat{\varphi})$

58. Hallen los valores de $\hat{\varphi}_1$ y de $\hat{\varphi}_2$.

$(4; \hat{\varphi}_1) . (2; \hat{\varphi}_2) = (8; 150°) \wedge (6; \hat{\varphi}_1) : \left(\frac{1}{2}; \hat{\varphi}_2\right) = (12; 10°)$

59. Escriban cada número complejo en forma trigonométrica. Luego, resuelvan.

$z_1 = 2 - 4i$ $z_2 = 5$ $z_3 = -4i$ $z_4 = -1 - i$

$z_1 =$ $z_3 =$

$z_2 =$ $z_4 =$

a. $z_1 . z_2 =$

b. $z_3 : z_4 =$

c. $(z_1 : z_2) . (z_3 : z_4) =$

Integración final

60. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

a. Los números complejos a veces tienen un vector asociado. ☐

b. La suma de dos números complejos conjugados nunca es un número imaginario puro. ☐

c. La resta de dos números complejos conjugados siempre es un número imaginario puro. ☐

d. Un número real es el que tiene componente imaginaria igual a cero. ☐

e. El producto de dos números complejos conjugados es igual a la diferencia entre el cuadrado de la componente real y el cuadrado de la componente imaginaria. ☐

f. El producto entre dos potencias de i es siempre un número imaginario puro. ☐

g. El cociente de dos números complejos a veces es un número real. ☐

h. El cociente de dos números complejos conjugados puede ser un número real. ☐

61. Resuelvan las operaciones teniendo en cuenta los siguientes números complejos.

$z_1 = 3 - i$; $z_2 = 1 + 2i$; $z_3 = -i$; $z_4 = -2 + 6i$

a. $z_2 \cdot z_3 =$

b. $(z_1 - z_3)^2 =$

c. $z_4 : z_3 =$

d. $-2 \cdot (z_1 - z_4) : z_2 =$

e. $z_3 \cdot \overline{z_3} =$

f. $z_1 \cdot (i^4)^7 - \frac{1}{2} z_4 =$

g. $(z_1 + z_3) \cdot (z_1 - z_3) =$

h. $z_2 : z_3 + z_4 : z_1 =$

62. Expresen como una única potencia de i y resuelvan.

a. $i^5 \cdot i^7 : i^{-2} =$

b. $(i^7 \cdot i^{-10})^3 =$

c. $i^{4k+3} \cdot i^2 \cdot i^7 =$

d. $i^{4k+20} : i^{18} =$

63. Calculen.

a. $z^3 - z^2$ para $z = 2 - i$.

b. $-z : \overline{z}$ para $z = 1 - \frac{1}{2} i$.

c. z^3 para $z = \frac{3 - 6i}{2 - 4i}$.

d. z^2 para $z = 2 . (\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$.

e. $z - \overline{z}$ para $z = 2 . [\cos (-30°) + i \operatorname{sen} (-30°)]$.

f. z^2 para $z = (1; 315°)$.

64. Determinen el valor de $\hat{\varphi}$ para que cumpla las condiciones pedidas en cada caso.

$z_1 = 4 . (\cos 100° + i . \operatorname{sen} 100°)$
$z_2 = 2 . (\cos \hat{\varphi} + i . \operatorname{sen} \hat{\varphi})$

a. $z_1 \cdot z_2$ sea un número imaginario puro negativo.

b. $z_1 \cdot z_2$ sea un número real positivo.

c. $z_1 : z_2$ sea un número imaginario puro positivo.

d. $z_1 : z_2$ sea igual $1 + \sqrt{3} i$.

65. Hallen el valor de a para que se cumplan las igualdades.

a. $(1 + 2i)^2 = -3 + ai$

b. $(1 + 3i)^2 = a + 6i$

c. $(5 + 2i)^2 = a + 20i$

d. $(3 + i)^3 = (2a - 6) + 26i$

66. Hallen el valor de z en cada caso.

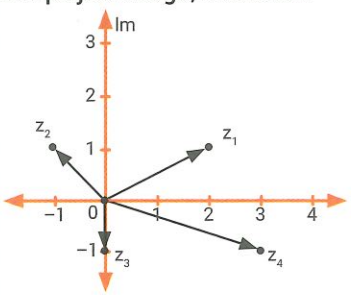
a. $(4 - 2i) . z = 1 - i^{17}$

b. $(5 - 5i) . z = 1$

c. $(2 - \overline{z}) . (1 - i) = 3 - 2i$

d. $\left(\frac{1}{z}\right) + 1 = 2 + i$

67. Escriban en forma binómica los siguientes complejos. Luego, resuelvan.



a. $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3 \cdot Z_4} =$

b. $\frac{Z_4}{Z_3} + Z_1 =$

c. $(Z_1 - Z_2)^2 =$

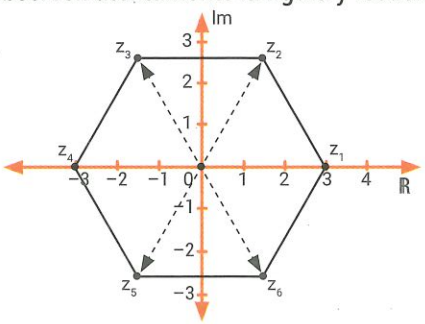
d. $Z_3^3 \cdot \overline{Z_4} =$

68. Resuelvan sabiendo que $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

a. $Z^{-1} \cdot \overline{Z} =$

b. $\frac{-Z \cdot \overline{Z}}{1 + i^{37}} =$

69. Observen atentamente la figura y resuelvan.



a. Expresen en forma trigonométrica las coordenadas de los vértices del hexágono regular.

$Z_1 =$

$Z_2 =$

$Z_3 =$

$Z_4 =$

$Z_5 =$

$Z_6 =$

b. Calculen.

$Z_1 \cdot Z_4 =$

$Z_6 \cdot Z_2 =$

$\overline{Z_5} \cdot Z_1 =$

$Z_1 \cdot \overline{Z_2} =$

70. Expresen en forma polar el resultado de las siguientes operaciones.

a. $\frac{i^8 + 3i^2 + i^{10}}{i^{24} + i^{32}} =$

b. $\frac{2 + i^{4K+1}}{2 - i^{4K+3}} =$

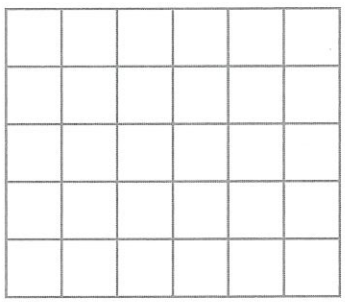
71. Hallen los valores pedidos en cada caso.

a. El valor de $z = a + bi$ para que $z \cdot i + 3 \cdot \overline{z} = -2 + i$.

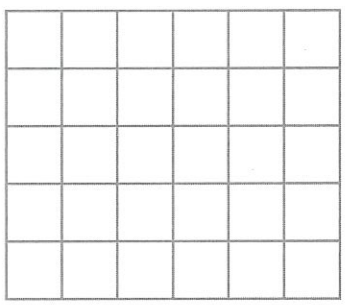
b. $|z_1^2 - z_2|$ para $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = -1 + 2i$.

72. Representen en un sistema de ejes todos los números complejos posibles en cada caso.

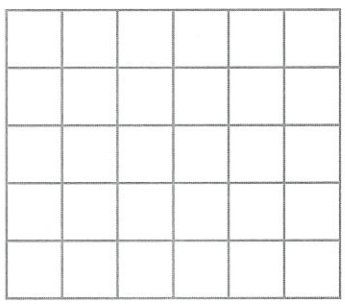
a. Re (z) = 3



b. Im(z) = 1



c. Re(z) = Im (z)



Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo del cuadrante I

Las funciones trigonométricas de ángulos de cualquier cuadrante se pueden relacionar con funciones trigonométricas de ángulos del cuadrante I.

TIP

v significa o.

Ángulos complementarios $\left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90° = \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \hat{\alpha}\right)$ v $\cos \hat{\alpha} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \hat{\alpha}\right)$

Ángulos suplementarios $(\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180° = \pi)$

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \operatorname{sen}(\pi - \hat{\alpha})$

$\cos \hat{\alpha} = -\cos(\pi - \hat{\alpha})$

$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = -\operatorname{tg}(\pi - \hat{\alpha})$

Ángulos que difieren de π

$(\pi < \hat{\alpha} < \frac{3}{2}\pi)$ v $(180° < \hat{\alpha} < 270°)$

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = -\operatorname{sen}(\hat{\alpha} - \pi)$

$\cos \hat{\alpha} = -\cos(\hat{\alpha} - \pi)$

$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = \operatorname{tg}(\hat{\alpha} - \pi)$

Ángulos que difieren de 2π

$(\hat{\alpha} > 2\pi)$ v $(\hat{\alpha} > 360°)$

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \operatorname{sen}(2\pi + \hat{\alpha})$

$\cos \hat{\alpha} = \cos(2\pi + \hat{\alpha})$

$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = \operatorname{tg}(2\pi + \hat{\alpha})$

Ángulos que suman 2π

$(\pi < \hat{\alpha} < 2\pi)$ v $(270° < \hat{\alpha} < 360°)$

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = -\operatorname{sen}(2\pi - \hat{\alpha})$

$\cos \hat{\alpha} = \cos(2\pi - \hat{\alpha})$

$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = -\operatorname{tg}(2\pi + \hat{\alpha})$

Ángulos opuestos

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = -\operatorname{sen}(-\hat{\alpha})$

$\cos \hat{\alpha} = \cos(-\hat{\alpha})$

$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = -\operatorname{tg}(-\hat{\alpha})$

Propiedades de la potenciación

Producto de potencias de igual base.
Se mantiene la base y se suman los exponentes.

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

Cociente de potencias de igual base.
Se mantiene la base y se restan los exponentes.

$a^b : a^c = a^{b-c}$

Potencia de otra potencia.
Se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

$(a^b)^c = a^{b.c}$

Potenciación con exponente negativo.

$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ $(a \neq 0)$

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se resuelve con la fórmula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Las raíces pueden ser reales distintas, iguales o complejas conjugadas, según las siguientes condiciones.

- Son **reales distintas** si... $b^2 - 4ac > 0$
- Son **reales iguales** si... $b^2 - 4ac = 0$
- Son **complejas conjugadas** si... $b^2 - 4ac < 0$

2 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

73. ¿Cuál es el conjugado del opuesto de $z = 1 + i$?

◯ $-1 - i$ ◯ $-1 + i$ ◯ $1 - i$ ◯ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

74. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $z = -3 + 2i$?

◯ $3 - 2i$ ◯ $-3 - 2i$ ◯ $-\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ ◯ $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

75. Si $z = \rho\,(\cos\hat{\varphi} + i.\,\text{sen}\,\hat{\varphi}) = \sqrt{3} + i$, ¿cuál es el valor de ρ y de $\hat{\varphi}$?

◯ $\rho = 4 \wedge \hat{\varphi} = 30°$ ◯ $\rho = 2 \wedge \hat{\varphi} = 120°$ ◯ $\rho = 2 \wedge \hat{\varphi} = 30°$ ◯ $\rho = 2 \wedge \hat{\varphi} = 330°$

76. Si $z = a + 3i \wedge |z| = \sqrt{10}$, ¿cuál es el valor de a?

◯ $a = -1$ ◯ $a = 3$ ◯ $a = -3$ ◯ $a = 0$

77. ¿Cuál es el valor del $\hat{\varphi}$ para que $2.[\cos(\hat{\varphi} + 30°) + i\,\text{sen}\,(\hat{\varphi} + 30°)]$ sea un número real negativo?

◯ $180°$ ◯ $120°$ ◯ $60°$ ◯ $150°$

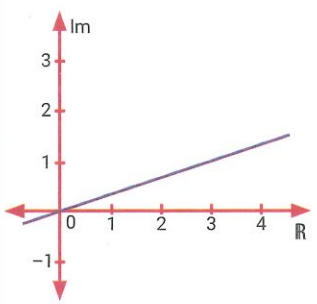
78. ¿Cuál es el resultado de i^{4k+3}?

◯ 1 ◯ -1 ◯ i ◯ $-i$

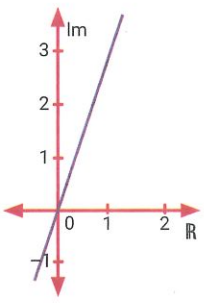
79. Si $z_1 = \sqrt{2}.(\cos 50° + i.\,\text{sen}\,50°)$ y $z_2 = \sqrt{8}.(\cos 130° + i.\,\text{sen}130°)$, ¿cuál es el resultado de $z_1.z_2$?

◯ 4 ◯ $4i$ ◯ -4 ◯ $-4i$

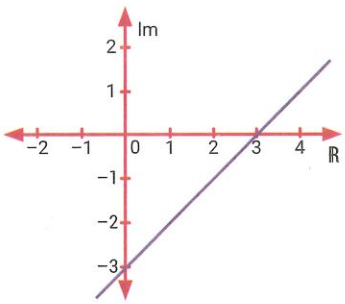
80. ¿Cuál es el gráfico correspondiente a los complejos que cumplen con: $\text{Re}(z) = 3.\,\text{Im}(z)$?



◯



◯



◯ ◯ Ninguno de los anteriores.

81. Si el producto entre $a + 2i$ y su conjugado es igual a 8, ¿cuál es el valor de a?

◯ $a = 0$ ◯ $a = -1$ ◯ $a = -2$ ◯ $a = 3$

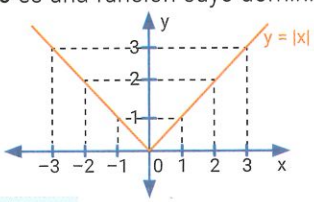
3 Funciones

12. Función parte entera, por partes y valor absoluto

▶ SABERES DINÁMICOS

• La función **módulo** o **valor absoluto** es una función cuyo dominio es $D_f = \mathbb{R}$ y se define como:

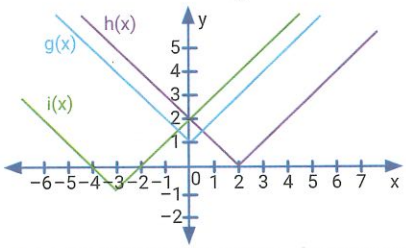
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Para recordar pág. 71

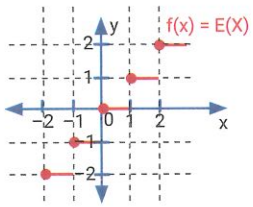
La fórmula general es: $f(x) = a \cdot |x - b| + c$

El corrimiento de la gráfica de la función, a partir de $f(x) = |x|$, depende de los valores que tomen b y c.



$g(x) = |x| + 1 \rightarrow$ 1 unidad hacia arriba.
$h(x) = |x - 2| \rightarrow$ 2 unidades hacia la derecha.
$i(x) = |x + 3| - 1 \rightarrow$ 3 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia abajo.

• La función **parte entera de x** es una función que le hace corresponder a cada número real x el menor de los números enteros entre los cuales está comprendido.



La parte entera de 2,37 es 2.
La parte entera de −6,2 es −7.

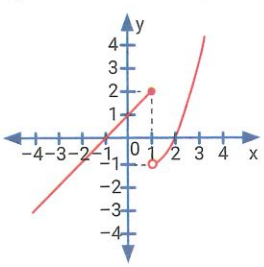
La función parte entera de x es una función definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ y se designa:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} / f(x) = E(x)$ v $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} / f(x) = [x]$

Intervalo	[−2; −1)	[−1; 0)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)
f(x) = E(x)	−2	−1	0	1	2

• Una **función por partes (o por tramos)** es una función que está definida por dos o más funciones, donde cada una de ellas está definida para un intervalo particular de su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



En la gráfica se utiliza el punto sólido para destacar que la imagen para x = 1 es 2 y no −1. El punto vacío indica que ese punto no pertenece a la función.

ACTIVIDADES

12. Función parte entera, por partes y valor absoluto

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. En la función $f(x) = |2x|$, ¿es cierto que $f(1) = f(-1)$?

b. En la función $g(x) = 1 + E(x)$, ¿a qué es igual $g(2,3)$? ¿Y $g(-1,99)$?

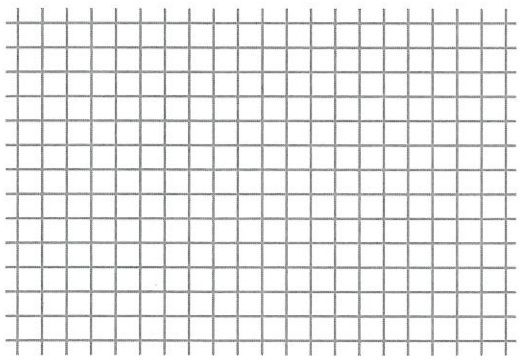
c. En una función por partes, ¿es posible que exista más de una fórmula definida para un mismo valor de "x"?

2. Completen la tabla con el valor de la función para cada valor de "x".

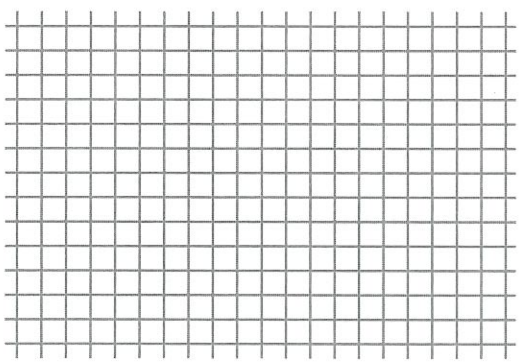
Función	$f(-3,13)$	$f(0)$	$f(1,7)$	$f(2,29)$
$f(x) = 2 - E(x)$				
$f(x) = E(1,3 + x)$				
$f(x) = -4E(x)$				
$f(x) = \frac{1}{2}E(x - 2)$				

3. Representen gráficamente las siguientes funciones.

a. $f(x) = E(x) + 2$



b. $f(x) = E(x + 1)$



4. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas en sus carpetas.

a. El dominio de la función $f(x) = E(x)$ es $D_f = \mathbb{Z}$. ☐

b. La gráfica de la función $f(x) = E(x) + 5$ es igual a la de la función $g(x) = E(x + 5)$. ☐

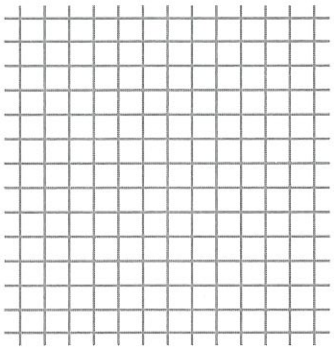
c. Si $f(x) = E(x) + 2$, se cumple que $f(-3)$ es igual a $f(-2,89)$. ☐

d. Si $g(x) = E(x + 9)$, se cumple que $g(-1,5)$ es igual a $g(-1)$. ☐

12. Función parte entera, por partes y valor absoluto

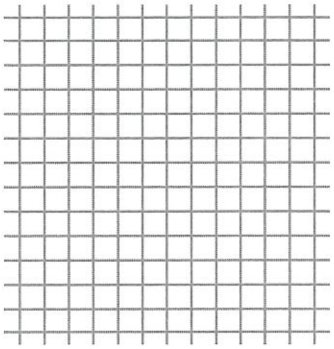
5. Grafiquen las siguientes funciones y luego indiquen el conjunto imagen de cada una.

a. $f(x) = |3x|$



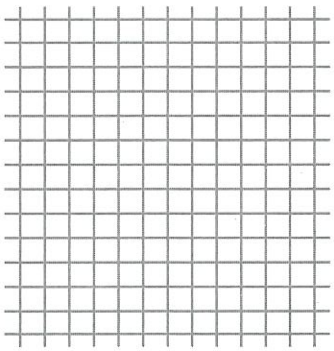
$I_f =$ _____

c. $f(x) = 1 - |x|$



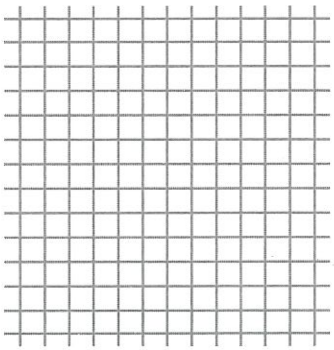
$I_f =$ _____

b. $f(x) = |x + 5|$



$I_f =$ _____

d. $f(x) = 2|x| - 4$



$I_f =$ _____

6. Escriban, en cada caso, la fórmula de la función módulo respecto a la función $y = |x|$.

a. Se desplaza 7 unidades hacia la izquierda.

_____

b. Se desplaza 2 unidades hacia arriba.

_____

c. Se desplaza 3 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo.

_____

d. Se desplaza 1 unidad a la izquierda y 5 unidades hacia arriba.

_____

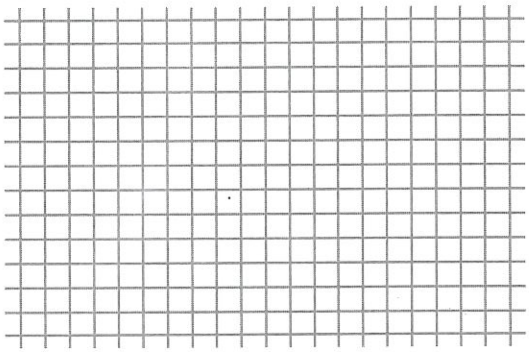
12. Función parte entera, por partes y valor absoluto

7. Completen la tabla. Luego, grafiquen en sus carpetas.

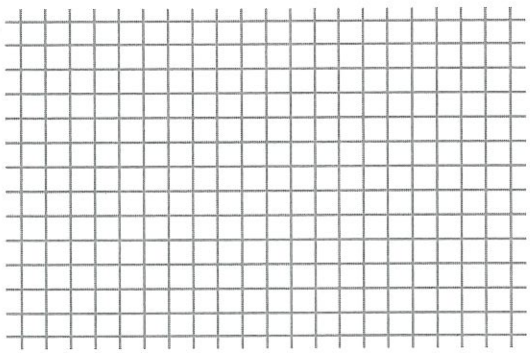
Función por partes	f(−2)	f(−1)	f(0)	f(1)	f(2)	f(3)
$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ 2x & \text{si } x < -1 \end{cases}$						
$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$						
$f(x) = \begin{cases} \lvert 3x \rvert & \text{si } x > 1 \\ -3x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$						

8. Definan la función f para cada situación y grafiquen la función.

a. La función f está compuesta por tres tramos rectos. El tramo correspondiente al intervalo $(-\infty; -2)$ es una función lineal que tiene raíz −3 y ordenada al origen 6; al tramo $[-2; 1)$ le corresponde una función constante que corta al eje "y" en 4, y para el tercer tramo $[1; +\infty)$ le corresponde la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos (4; −2) y (7; −5).



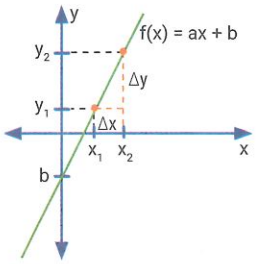
b. Una empresa de mudanzas cobra un monto fijo de $12000 si la mudanza la hace en menos de 2 horas, $5500 por hora de trabajo si tarda entre 2 y 5 horas, y $4800 la hora de trabajo si tarda más de 5 horas.



13. Función lineal

▶ SABERES DINÁMICOS

Se denomina **función lineal** a la función polinómica de primer grado **f(x) = ax + b** (a y b números reales), donde "a" es la **pendiente** y "b" la **ordenada al origen**.
La representación gráfica es una recta.



- La **pendiente** indica la inclinación de la recta y, dados dos puntos, es el cociente entre la variación de la variable dependiente (Δy) y la variación de la variable independiente (Δx).

$$p = (x_1; y_1) \wedge q = (x_2; y_2) \Rightarrow \mathbf{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

- La **ordenada al origen** es el valor donde la recta interseca al **eje y** ($x = 0$) $\Rightarrow f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow \mathbf{f(0) = b}$.
- La **raíz** es el valor donde la recta corta al **eje x** ($y = 0$) $\Rightarrow 0 = ax + b \Rightarrow \mathbf{x = -\frac{b}{a}}$.

Ecuación de la recta

La **ecuación de una recta** se puede expresar de distintas formas.

Forma explícita	Forma implícita o general	Forma segmentaria
$y = ax + b$	$Ax + By + C = 0$	$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$
a: pendiente b: ordenada al origen	$-\frac{C}{A}$: raíz ($A \neq 0$) $-\frac{C}{B}$: ordenada al origen ($B \neq 0$)	m: abscisa al origen n: ordenada al origen

Las siguientes fórmulas permiten hallar la ecuación de la recta según los datos dados.

Datos	Fórmula
Pendiente "a" y un punto $p = (x_1; y_1)$	$y - y_1 = a.(x - x_1)$
Dos puntos de la recta: $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Rectas paralelas y perpendiculares

- Dos rectas son **paralelas** si y solo si sus pendientes son iguales.

$M: y = a_1 x + b_1 \wedge P: y = a_2 x + b_2 \wedge M \,//\, P \Leftrightarrow a_1 = a_2$

- Dos rectas son **perpendiculares** si y solo si sus pendientes son inversas y opuestas.

$M: y = a_1 x + b_1 \wedge N: y = a_2 x + b_2 \wedge S \perp N \Leftrightarrow a_1 = -\frac{1}{a_2}$

- Dos rectas son **oblicuas** cuando no cumplen **ninguna de las dos condiciones anteriores.**

ACTIVIDADES

13. Función lineal

Test de comprensión

9. Respondan y expliquen las respuestas.

a. En la recta $2x + 2y - 4 = 0$, ¿es cierto que la pendiente es 2?

b. ¿Es cierto que dos rectas perpendiculares tienen siempre distinta ordenada al origen?

c. ¿Es cierto que existen infinitas formas implícitas que definen a la misma recta?

10. Completen la tabla.

Función lineal	Forma en la que está escrita	Pendiente	Ordenada al origen
$y = -x + 5$			
$\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$			
$y = 9$			
$4x - 2y + 8 = 0$			
$-x + y = 0$			
$\frac{x}{8} + y = 1$			

11. Escriban la ecuación explícita de cada recta según los datos dados. Luego, grafiquen las rectas en sus carpetas.

a. Tiene pendiente $a = 7$ y ordenada al origen -6.

b. Tiene pendiente 5 y pasa por el punto $(1; 1)$.

c. Pasa por los puntos $(-4; 6)$ y $(2; 9)$.

d. Pasa por el punto $(-6; -1)$ y corta al eje "y" en 5.

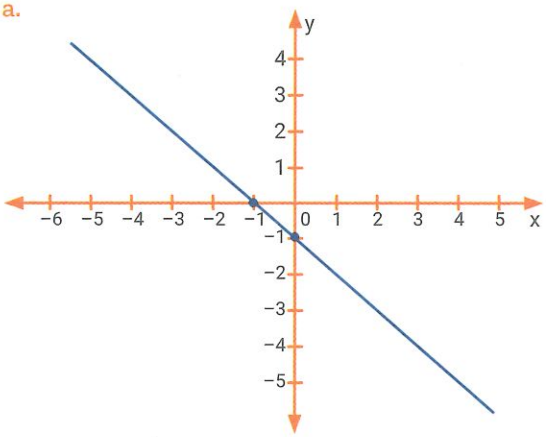
e. Corta al eje x en -2 y cumple $f(0) = -3$.

f. Pasa por el punto $(-3; 1)$ y corta al eje "y" en 1.

13. Función lineal

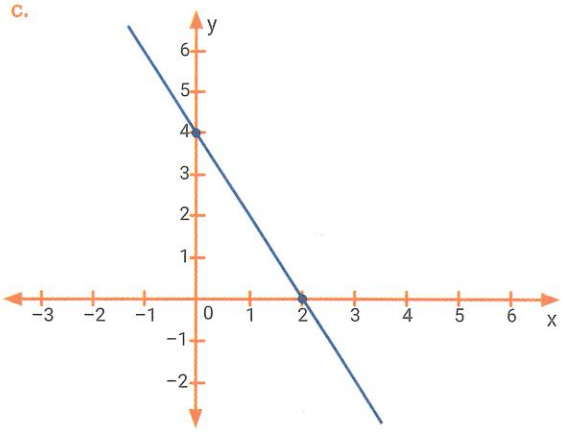
12. Escriban la ecuación segmentaria de cada recta graficada.

a.



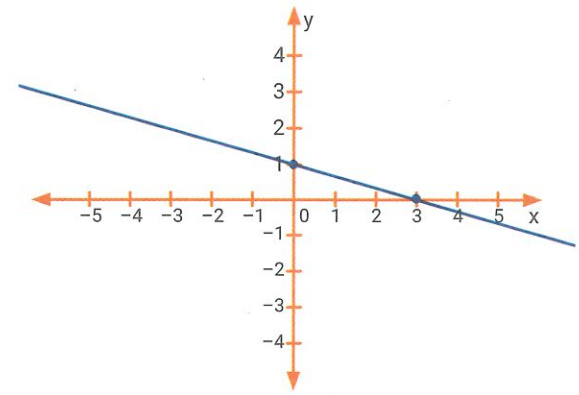
Ecuación segmentaria = _____

c.



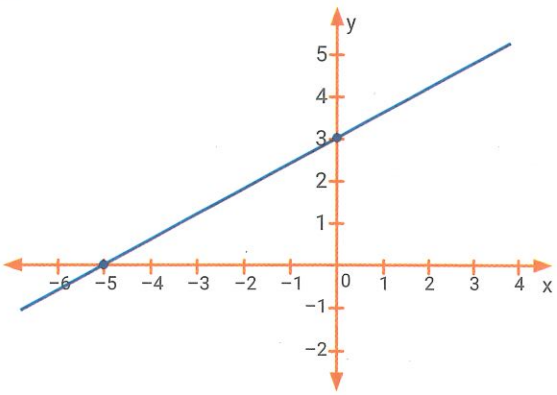
Ecuación segmentaria = _____

b.



Ecuación segmentaria = _____

d.



Ecuación segmentaria = _____

13. Decidan, en cada caso, si las rectas R y T que siguen son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

a. R: $\frac{y + 2x}{3} = 1$; T: $2x + y - 5 = 0$

b. R: $x + y + 1 = 9$; T: $y + 8 = x$

c. R: $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$; T: $y = 3x - 7$

13. Función lineal

14. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Cuál es la ordenada al origen de la recta $y - 5 = -2 . (x + 3) - 6$?

b. ¿Cuál es la raíz de la recta $4x + 2y - 12 = 0$?

c. La recta $\frac{y}{4} = 1$ ¿es paralela a la recta $y = 4x$?

d. ¿Cuál es el dominio de la función lineal $f(x) = -4 . (x - 1) + 7$?

e. ¿Cuánto vale la pendiente de una recta perpendicular a la recta $-3x + 3y = 9$?

15. Lean atentamente y respondan.

Por razones de salud, las personas deben limitar sus esfuerzos, por ejemplo, durante la realización de un deporte, para no sobrepasar cierta frecuencia de latidos del corazón.

Durante años, la relación entre el ritmo cardíaco máximo recomendable (r) y la edad de la persona (e) ha sido descripta por la fórmula $r = 220 - e$.

Sin embargo, esa fórmula varió por otra que se ajusta mejor a la realidad: $r = 208 - (0{,}7 . e)$.

a. ¿A partir de qué edad aumenta el ritmo cardíaco máximo recomendable como resultado de la introducción de la nueva fórmula?

b. ¿Cuál es el ritmo cardíaco máximo recomendable en esa edad?

16. Reconstruyan las fórmulas de las rectas A y B usando los datos dados. Luego, encuentren analíticamente las coordenadas del punto de intersección de ambas.

Recta A: pasa por los puntos (1; 3) y (−4; −7). **Recta B**: tiene por raíz $x = 4$ y es paralela a la recta $y = -x$.

DinámicaMente

Analicen y respondan.

a. La gráfica de la recta de ecuación $y = ax + b$ pasa por los cuadrantes I, II y IV. ¿Qué se puede decir de los valores de "a" y "b"?

b. La gráfica de la recta de ecuación $Ax + By + C = 0$ pasa solamente por los cuadrantes III y IV. ¿Qué se puede decir de los valores de A, B y C?

14. Función cuadrática

▶ SABERES DINÁMICOS

A la función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b y c números reales y $a \neq 0$) se la denomina **función cuadrática.**

Su gráfica es una curva que recibe el nombre de parábola.

Para graficar la parábola se debe hallar:

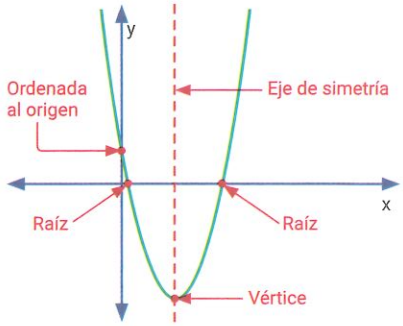
- **Raíces:** son los puntos de intersección de la parábola con el eje x.

Es decir, donde $f(x) = 0$.

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ Fórmula resolvente: $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- **Vértice:** es el punto máximo o mínimo de la función.

Sus coordenadas son $v = (x_v; y_v) \rightarrow x_v = \dfrac{-b}{2a}$ y $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $\quad y_v = f(x_v)$



- **Eje de simetría:** es la recta que divide a la parábola en dos ramas simétricas. Corta la parábola en su vértice; su ecuación es $x = x_v$. Permite ubicar puntos simétricos.

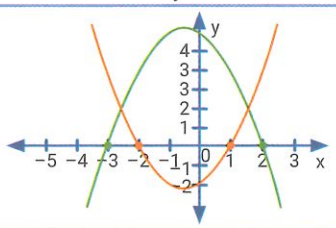
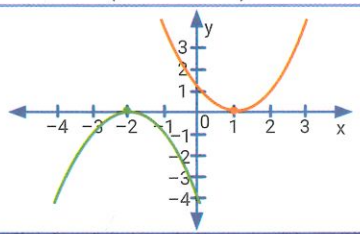
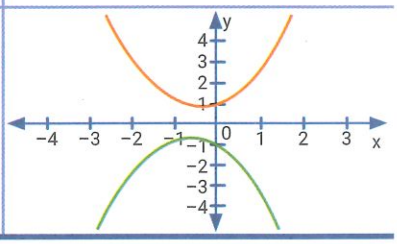
Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fucuad * para mirar un video donde se explica cómo se grafican funciones cuadráticas.

*Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=xRq3feSSfyc

Discriminante

La parte de la fórmula resolvente $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante** (se designa Δ) e indica la naturaleza de las raíces.

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Tiene dos raíces reales distintas.	Tiene una raíz real doble (o dos raíces reales iguales).	No tiene raíces reales.
La gráfica corta en dos puntos al eje x.	La gráfica corta en un punto al eje x (es el vértice).	La gráfica no corta al eje x.
		

Ecuaciones de la parábola

La función cuadrática puede ser expresada de diferentes formas.

Formas de la función cuadrática	Ecuación	Información que brinda la ecuación
Forma polinómica	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Coeficientes **a**, **b** y **c**
Forma canónica	$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$	Coeficiente **a** y vértice $v = (x_v; y_v)$
Forma factorizada	$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$	Coeficiente **a** y raíces x_1 y x_2

Se puede pasar de una forma a otra trabajando algebraicamente y/o buscando los elementos necesarios según la forma buscada.

14. Función cuadrática

Test de comprensión

17. Respondan y expliquen las respuestas.

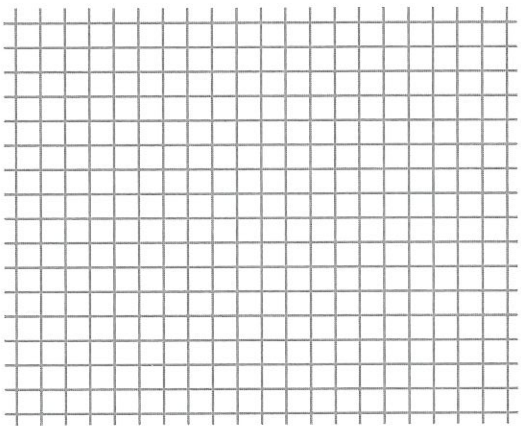
a. ¿Qué signo debe tener el coeficiente "a" de la parábola para que el vértice sea un mínimo?

b. ¿Es cierto que todas las parábolas se pueden escribir en forma factorizada?

c. Si $f(x) = 2 . (x - 1) . (x + 2)$, ¿cuál es la forma polinómica de la ecuación de f(x)?

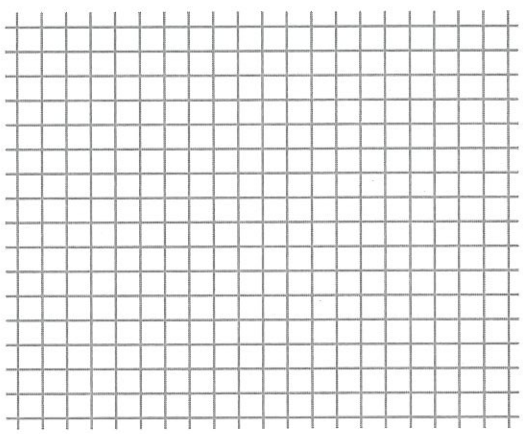
18. **Calculen lo pedido en cada caso. Luego, grafiquen.**

a. $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$



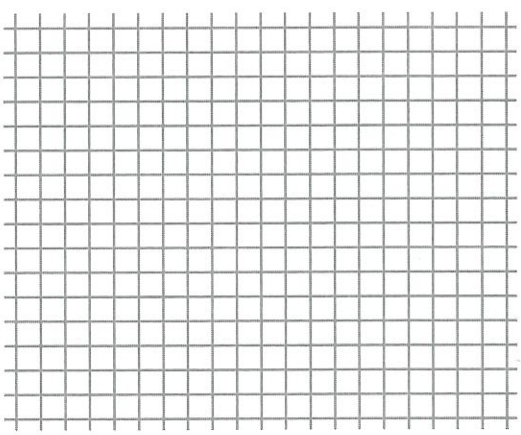
- Raíces: _____
- Ordenada al origen: _____
- Vértice: _____
- Eje de simetría: _____

b. $f(x) = -3 . (x - 2) . (x + 2)$



- Raíces: _____
- Ordenada al origen: _____
- Vértice: _____
- Eje de simetría: _____

c. $f(x) = (x + 5)^2 - 1$



- Raíces: _____
- Ordenada al origen: _____
- Vértice: _____
- Eje de simetría: _____

14. Función cuadrática

19. Completen la tabla.

Forma polinómica	Forma factorizada	Forma canónica
		$f(x) = 9 . (x - 2)^2 - 1$
$f(x) = x^2 + 10x + 24$		
	$f(x) = -2 . (x + 1) . (x - 3)$	

20. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. El dominio de la función $f(x) = x^2 + 2x$ es $D_f = \mathbb{R}$. ☐

b. Las raíces de la función $f(x) = 4 . (x + 7) . (x - 8)$ son 7 y −8. ☐

c. La función $f(x) = 3x^2 + 4x + 8$ está escrita en forma canónica. ☐

d. El punto (1; 2) pertenece a la función $f(x) = 5x^2 + 3x - 6$. ☐

e. El vértice de $f(x) = 6x . (x + 1)$ es el punto máximo. ☐

f. El conjunto imagen de la función $f(x) = -2 . (x + 3)^2$ es $I_f = (0; +\infty)$. ☐

21. Reconstruyan en las tres formas la fórmula de la función cuadrática a partir de los datos.

a. Tiene por raíces $x = 1$ y $x = -1$ y pasa por el punto (2; 12).

b. Tiene por vértice $v = (-2; 3)$ y la gráfica corta al eje y en −9.

c. El conjunto imagen es $[-7; +\infty)$ y la gráfica corta al eje x en 2 y 4.

14. Función cuadrática

22. Planteen y resuelvan.

a. Se arroja una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 16 metros por segundo. Su altura A a los t segundos está dada por la función $A(t) = 16t - 4t^2$. Calculen la altura máxima alcanzada por la pelota y el tiempo total de su recorrido desde que es lanzada hasta volver al suelo.

b. ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es de 200 m para que el área sea máxima y cuál es esta?

c. La ganancia G (en $) percibida al vender "x" calculadoras científicas está expresada por la función $G(x) = -\frac{x^2}{728} + 9x$. ¿Cuántas calculadoras hay que vender para obtener la máxima ganancia? Calculen la ganancia.

d. ¿Cuál es el producto mínimo de dos números cuya diferencia es 6?

e. La trayectoria que describe la pelota cuando un jugador patea el tiro libre es parabólica. La distancia en línea entre el jugador y el punto en que la pelota toca el suelo es de 20 metros. Si la altura máxima alcanzada por la pelota es de 4 m, a qué altura estaba la pelota cuando el arquero ubicado a 18,5 m del jugador intenta atajarla.

23. Completen la tabla.

Función	Tipo de función
$f(x) = \lvert x - 7 \rvert$	
$f(x) = -x$	
$f(x) = 9$	
$f(x) = (x - 3) \cdot (x + 9)$	
$f(x) = E(x + 2)$	
$f(x) = x^2 - 7x$	

24. Encuentren la imagen pedida en cada caso.

a. $f(x) = \begin{cases} E(x) + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$f(1{,}2) =$ $f(-1) =$

$f(-3{,}5) =$ $f(0) =$

b. $f(x) = \begin{cases} \lvert 2x - 5 \rvert & \text{si } x > -1 \\ x^2 - 3x & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

$f(0) =$ $f(-1) =$

$f(2) =$ $f(-2) =$

25. Calculen lo pedido para cada función.

a. $f(x) = \lvert x + 3 \rvert - 1$

$D_f =$ $C_0 =$

$f(0) =$ $I_f =$

b. $f(x) = -2x + 6$

$D_f =$ $C_0 =$

$f(0) =$ $I_f =$

c. $f(x) = x^2 + x - 20$

$D_f =$ $C_0 =$

$f(0) =$ $I_f =$

26. Grafiquen las siguientes funciones.

a. $f(x) = -4\lvert x \rvert$

b. $f(x) = 3 \cdot (x - 1) - 3$

c. $f(x) = 1 - E(x)$

d. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \geq 0 \\ -x + 2 & \text{si } -3 < x < 0 \\ x - 3 & \text{si } x \leq -3 \end{cases}$

27. Hallen la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las siguientes rectas.

a. $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$

b. $y - 6 = 6 \cdot (x - 1)$

c. $5x + 5y + 25 = 0$

d. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$

28. Reconstruyan, a partir de los datos, la fórmula de la función pedida en cada caso.

a. Función lineal que cumple $f(1) = -4$ y $f(2) = 3$.

b. Función cuadrática cuya parábola tiene el vértice en $v = (8; -1)$ y pasa por el punto $(9; 1)$.

c. Función módulo cuya gráfica se desplaza 6 unidades a la derecha respecto a la de $y = \lvert x \rvert$.

d. Función cuadrática que tiene por raíces -3 y 4 y su ordenada al origen es 24.

e. Función lineal con pendiente 0 y cuya ordenada al origen es 9.

29. Tengan en cuenta las rectas R y T y completen con // (paralelas) o $\perp$ (perpendiculares) según corresponda.

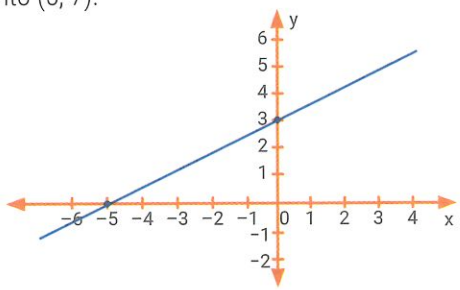
a. R: $x + y = 1$ ☐ T: $2y = -2x + 7$

b. R: $\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$ ☐ T: $y - \frac{1}{2}x = 0$

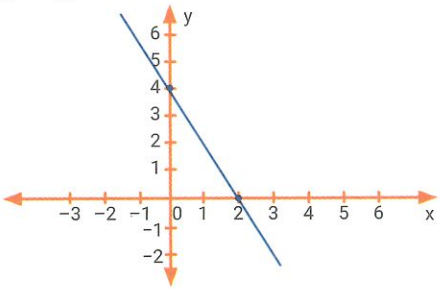
c. R: $2 \cdot (x + 6) = y$ ☐ T: $3y - 6x + 3 = 0$

30. Escriban la ecuación de la recta pedida en cada caso.

a. Recta paralela a la del gráfico que pase por el punto (5; 7).



b. Recta perpendicular a la del gráfico cuya raíz es $x = -6$.



31. Completen la tabla.

Fórmula de la función	Información que brinda la fórmula
$f(x) = 5x - 11$	
$f(x) = 5 . (x - 3)^2 + 6$	
$f(x) = x^2 - 3x + 9$	
$f(x) = 7$	
$f(x) = 8x . (x - 4)$	

32. Hallen las tres formas de cada función cuadrática según los datos dados en cada caso.

a. Tiene por raíces 3 y 7 y pasa por (1; 24).

Factorizada:

Polinómica:

Canónica:

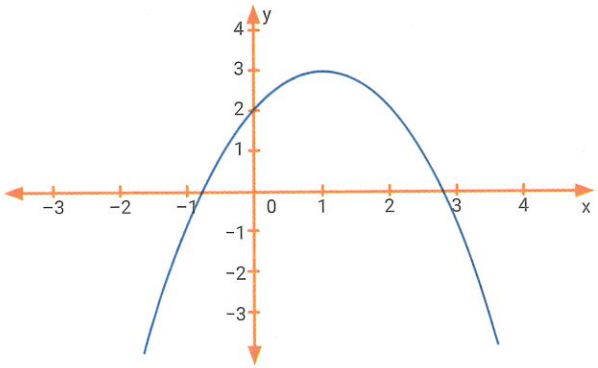
b. Tiene por vértice (2; −3) y $f(0) = 9$.

Factorizada:

Polinómica:

Canónica:

33. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.



a. El vértice de la parábola es un mínimo. ☐

b. La función no tiene raíces. ☐

c. El vértice es $v = (1; 3)$. ☐

d. En la fórmula $\Delta < 0$. ☐

e. Se cumple que $f(0) = 2$. ☐

f. El conjunto $I_f = (2; +\infty)$. ☐

g. La función es creciente. ☐

h. El conjunto $C^+ = \mathbb{R}$. ☐

34. Completen la tabla.

Polinómica		$y = 4x^2 - 8x$
Canónica		
Factorizada	$y = (x + 2) . (x + 3)$	

35. Planteen y resuelvan.

a. Una remisería cobra $350 si el viaje es hasta 2,5 km y a partir de allí le suma $95 por cada kilómetro extra. ¿Cuánto pagará una persona cuyo viaje es 1,6 km? ¿Y si es de 5,5 km?

b. La altura de un proyectil que se lanza verticalmente está dada por la función $h(t) = 20t - 5t^2$. ¿Qué altura máxima alcanza y en qué instante?

15. Función polinómica

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **función polinómica** es una función cuya expresión algebraica es un polinomio.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(n es natural y a_n; $a_{n-1} \ldots a_2$; a_1; a_0 son números reales)

El **dominio** de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales ($D_f = \mathbb{R}$).
Para realizar el gráfico aproximado de una función polinómica se pueden seguir los siguientes pasos:

- Factorizar el polinomio y determinar las **raíces** (una función polinómica tiene, a lo sumo, tantas raíces como el grado de la función).
- Indicar el **orden de multiplicidad** de cada raíz (es el número de veces que esa raíz se repite como tal) y definir el comportamiento de la gráfica: si es par, la gráfica rebota en el eje x y si es impar, la gráfica atraviesa el eje x.
- Encontrar la **ordenada al origen** f(0) = y. Es el término independiente del polinomio.
- Hallar el **conjunto de positividad** (C^+) y el **conjunto de negatividad** (C^-) de la función.

El conjunto C^+ está formado por todos los valores del dominio para los cuales la función es positiva.
El conjunto C^- está formado por todos los valores del dominio para los cuales la función es negativa.

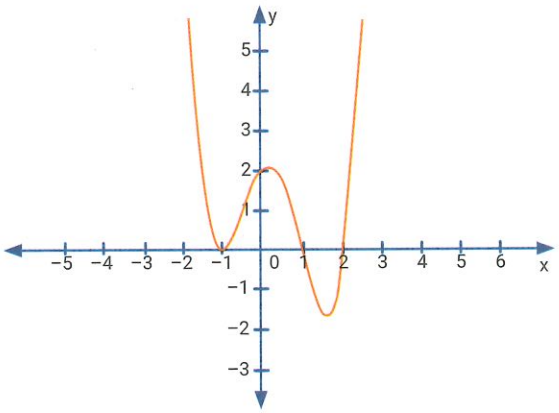
$$C^+ = \{x \in D_f / f(x) > 0\} \qquad C^- = \{x \in D_f / f(x) > 0\}$$

$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

Factorizada

$f(x) = (x + 1)^2 . (x - 1) . (x - 2)$ $\qquad C_0 = \{-1; 1; 2\}$ $\qquad f(0) = 2$

Doble *Simples*



Las funciones polinómicas son **continuas.**

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/funpoli* para mirar un video donde se explican las características de las funciones polinómicas.

*Enlace acortado de https://youtu.be/pd7ZSI6w5Ig

Áreas dinámicas [Matemática y Economía]

Las funciones polinómicas se usan en muchos problemas de economía. Por ejemplo, para modelizar los mercados, mostrando cómo varían los precios con el tiempo; o para entender cómo subir o bajar el precio de un producto que repercute en sus ventas; o también en el cálculo de impuestos.

15. Función polinómica

Test de comprensión

36. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Cuál es el grado de la función polinómica $f(x) = 4x - 6x^3 + x^8 - 5x^2$?

b. ¿Es cierto que el coeficiente principal de la función $h(x) = x^4 + 5x - 7$ es 0?

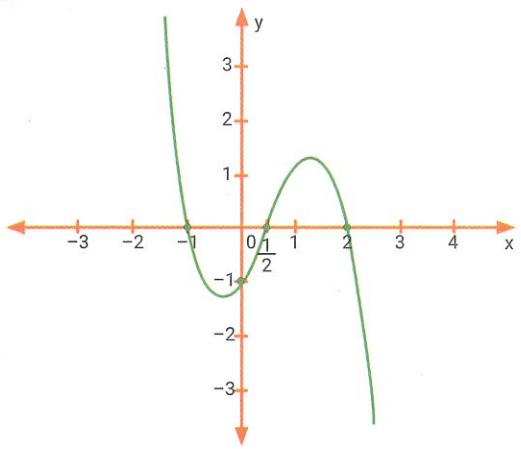
c. ¿Es cierto que las raíces de $h(x) = 3 . (x - 5) . (x + 4)^2$ son -5 y 4?

37. Completen la tabla.

Función	Grado	Forma factorizada	Raíces	Ordenada al origen
$f(x) = x^3 - 12x - 16$				
$f(x) = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2$				
$f(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$				
$f(x) = -2x^5 - 12x^4 - 18x^3$				

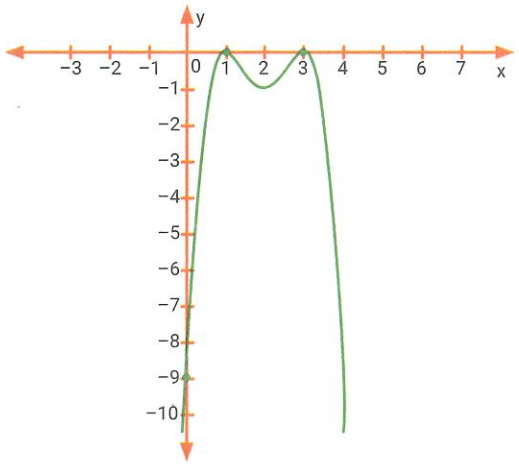
38. Observen los gráficos y completen.

a.



- D_f = _____
- C_0 = _____
- $f(0)$ = _____
- C^+ = _____
- C^- = _____

b.



- D_f = _____
- C_0 = _____
- $f(0)$ = _____
- C^+ = _____
- C^- = _____

15. Función polinómica

39. Escriban una función polinómica que cumpla lo pedido en cada caso. Luego, discutan con un compañero si sus respuestas son correctas y si las soluciones son únicas.

a. Coeficiente principal 5, $x_1 = 2$ (raíz doble) y $x_2 = 8$ (raíz simple).

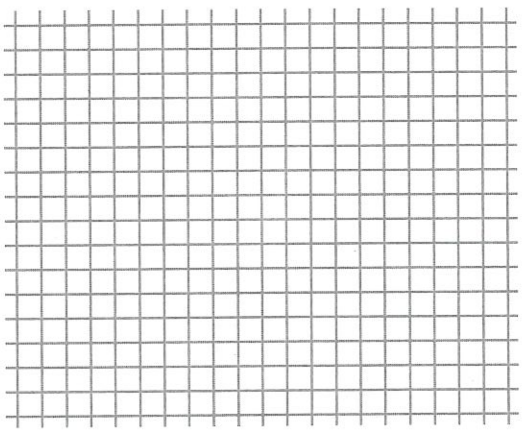
b. Coeficiente principal -1 y tiene tres raíces simples impares.

c. Tiene $C_0 = \{-4; 6\}$ ambas dobles.

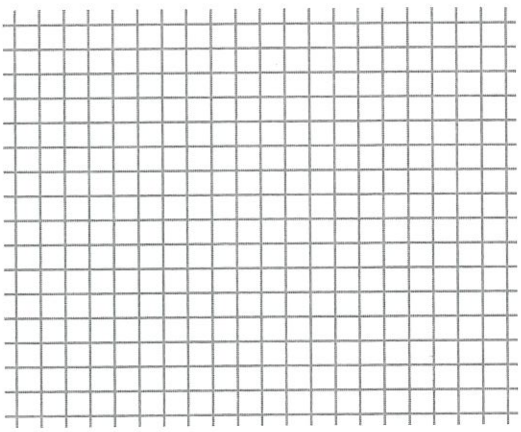
d. Coeficiente principal 5, $x_1 = 0$ (raíz doble) y $x_2 = 7$ (raíz triple).

40. Expresen las siguientes funciones en forma factorizada, hallen las raíces con su multiplicidad, la ordenada al origen y analicen el conjunto de positividad y negatividad. Luego, grafiquen.

a. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5$



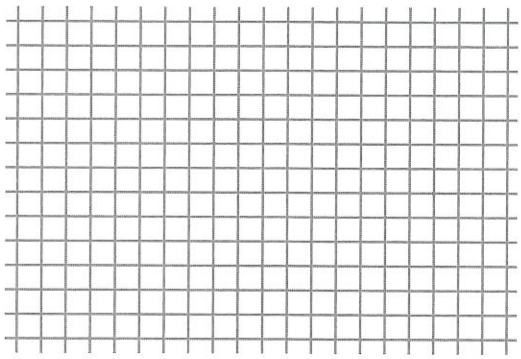
b. $f(x) = 2x^4 - 6x^3 - 24x - 32$



15. Función polinómica

41. Aproximen la gráfica de una función polinómica que cumpla lo pedido en cada caso. Luego, escriban C^+ y C^-.

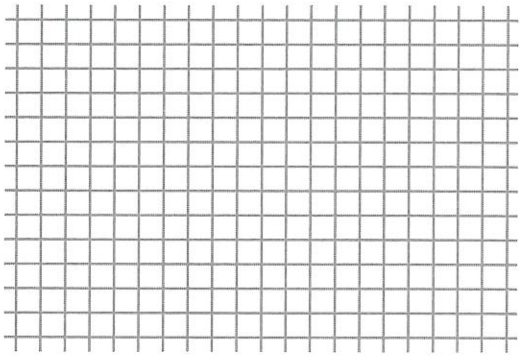
a. Tiene 3 raíces simples $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ y cumple que $f(0) = -2$.



$C^+ =$ _____

$C^- =$ _____

b. Las raíces son $x_1 = 0$ (triple) $x_2 = 4$ (doble) y $f(1) = 6$.



$C^+ =$ _____

$C^- =$ _____

42. Reconstruyan la fórmula de una función polinómica según los datos dados en cada caso.

a. Tiene por raíces 1; −2 y −3 (todas simples) y $f(0) = 5$.

_____

b. Es de grado 3, $C^+ = (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ y $f(1) = 2$.

_____

43. Planteen y resuelvan.

Una empresa fabrica cofres de seguridad con forma de cubo. La fórmula que permite calcular el costo "C" de fabricación en función de la arista "x" está dada por la fórmula:

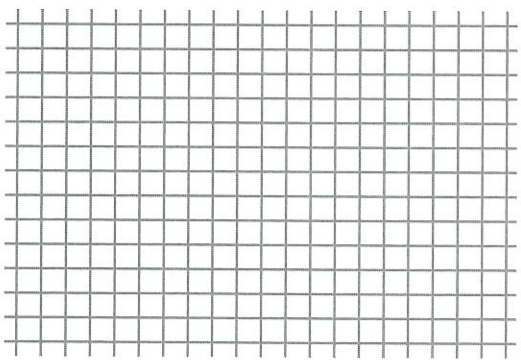
$$C(x) = 400x^3 + 600x^2 + 320x + 170$$

a. ¿Cuál es el costo para fabricar un cofre de arista igual a 1,5 m? _____

b. ¿Cuál es la longitud de la arista de un cofre cuyo costo es de $530? _____

c. ¿Cuál es el dominio de la función C(x) pensando en el contexto del problema? _____

d. Grafiquen la función.



16. Función racional

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **función racional** es una función de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P(x) y Q(x) polinomios y $Q(x) \neq 0$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^3 + x + 1} \qquad g(x) = \frac{2x + 6}{4x} \qquad h(x) = -\frac{5}{x + x^2}$$

El **dominio** de una función racional es: $D_f = \mathbb{R} - \{\text{raíces del denominador}\}$.
Para calcular las raíces del denominador se iguala a 0 y se hallan los valores de x.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 9} \rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$$

Asíntotas de una función racional

Se le llama **asíntota** de una función a una recta a la que la gráfica se aproxima continuamente, es decir, la distancia entre las dos tiende a ser cero.
Existen tres tipos de asíntotas: **vertical**, **horizontal** y **oblicua**.

- Los valores excluidos del dominio pueden ser **asíntota vertical**.
- La **asíntota horizontal** se obtiene comparando el grado de P(x) y Q(x).

- Si el grado de P(x) es menor que el grado de Q(x), la asíntota horizontal es y = 0.
- Si el grado de P(x) es igual que el grado de Q(x), la asíntota horizontal es $y = \frac{\text{coef. ppal. de P(x)}}{\text{coef. ppal. de Q(x)}}$.
- Si el grado de P(x) es mayor que el grado de Q(x), no hay asíntota horizontal.

- Si no hay asíntota horizontal, se busca la **asíntota oblicua**, que existe solo si "grado de P(x)" − "grado de Q(x)" = 1. En ese caso, la asíntota oblicua es $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Para representar una función racional se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se determina el conjunto dominio.
2. Se hallan las ecuaciones de las asíntotas.
3. Se hallan los puntos de intersección con los ejes y otros puntos de la función.

$$f(x) = \frac{3x + 6}{x - 2}$$

1. $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

2. Asíntota vertical en x = 2.

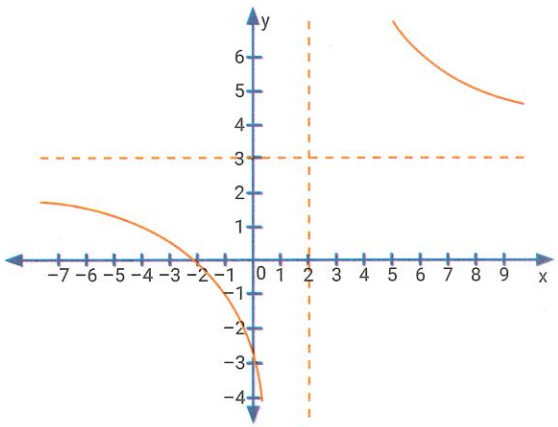
Asíntota horizontal en y = 3.

3. Intersección con los ejes:

f(0) = −3, f(−2) = 0

4. Otros puntos:

x	−3	−1	3	4
f(x)	$\frac{3}{5}$	−1	15	9



ACTIVIDADES

16. Función racional

Test de comprensión

44. Respondan y expliquen las respuestas.

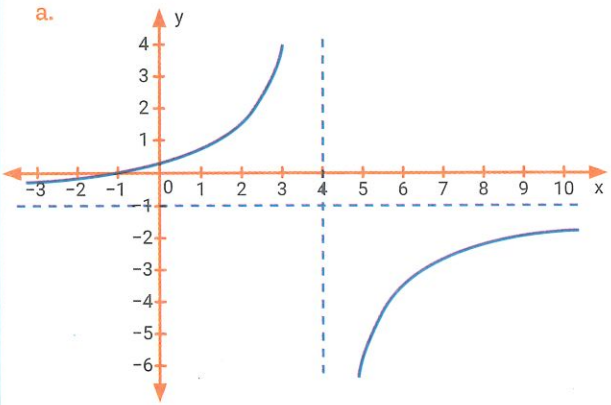
a. ¿Es cierto que la función $f(x) = \frac{2x + 9}{3}$ es racional?

b. ¿Es cierto que ninguna función racional puede tener dominio $D_f = \mathbb{R}$?

c. ¿Es cierto que la función $f(x) = \frac{5}{x^2 - 4}$ tiene dos asíntotas verticales?

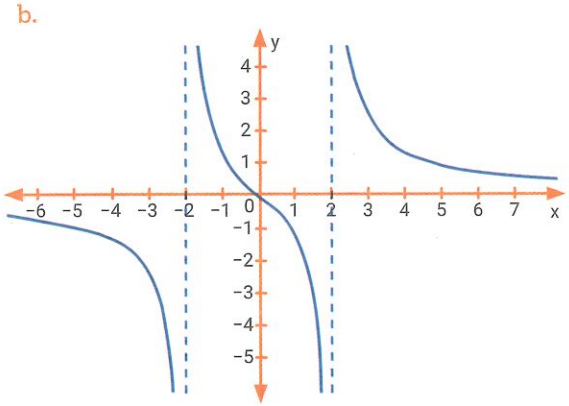
45. Observen los gráficos y completen.

a.



- D_f = _____
- A.V. = _____
- A.H.= _____
- I_f = _____

b.



- D_f = _____
- A.V. = _____
- A.H.= _____
- I_m = _____

46. Completen la tabla.

Función	Dominio	A.V.	A.H.	f(0)	C_0
$f(x) = \frac{2}{x}$					
$f(x) = \frac{2x + 8}{x - 1}$					
$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$					
$f(x) = \frac{x + 5}{x^4 + 1}$					
$f(x) = \frac{6 - x}{x + 12}$					

17. Función homográfica

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **función homográfica** es una función racional de la forma $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, siendo a, b, c y d números reales y $c \neq 0$.

Dominio de la función homográfica

El denominador de la función debe ser distinto de cero: $cx + d \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{d}{c}$. Por lo tanto, el dominio es:

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

La recta de ecuación $x = -\frac{d}{c}$ es la **asíntota vertical** de la función.

Imagen de la función homográfica

La imagen es: $I_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

La recta de ecuación $y = \frac{a}{c}$ es la asíntota horizontal de la función.

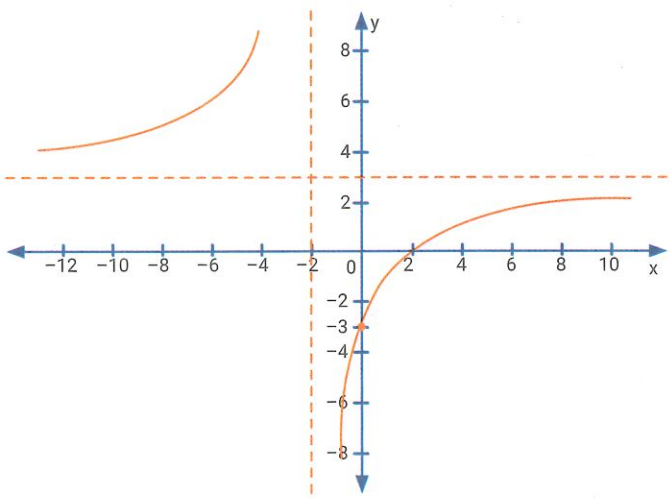
Representación gráfica

Para representar gráficamente una función homográfica $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ se debe:

1. Determinar dominio e imagen.
2. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas.
3. Determinar la ordenada al origen. $f(0) = y$.
4. Encontrar la raíz de la función: $f(x) = 0$.

$f(x) = \frac{6x - 12}{2x + 4}$

1. $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$; $I_f = \mathbb{R} - \{3\}$
2. A.V. en $x = -2$; A.H. en $y = 3$
3. $f(0) = \frac{6.0 - 12}{2.0 + 4} \Rightarrow f(0) = -3$
4. $\frac{6x - 12}{2x + 4} = 0 \Rightarrow f(2) = 0$



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/funhom * para mirar un video donde se explica cómo se grafica una función homográfica.

*Enlace acortado de https://youtu.be/Li3q9GYBGeY

ACTIVIDADES

17. Función homográfica

Test de comprensión

47. Respondan y expliquen las respuestas.

a. La función $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 7}$ ¿es una función homográfica?

b. ¿Es cierto que el dominio de $f(x) = \frac{x + 5}{x + 7}$ es $D_f = \{-7\}$?

c. ¿Es cierto que todas las funciones homográficas tienen una asíntota horizontal?

48. Indiquen de cada función homográfica el dominio, la imagen y las ecuaciones de las asíntotas.

a. $f(x) = \frac{8x + 7}{2x - 6}$

b. $f(x) = \frac{7x - 4}{x + 1}$

c. $f(x) = \frac{-x - 9}{x + 3}$

49. Escriban, en cada caso, la fórmula de una función homográfica que cumpla lo pedido. Luego, discutan con un compañero si sus respuestas son correctas y si las soluciones son únicas.

a. Asíntota vertical en $x = 7$ y asíntota horizontal en $y = 4$.

b. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ y asíntota horizontal en $y = -2$.

50. Escriban V (verdadero) o F (falso), sabiendo que $f(x) = \frac{7x - 4}{x + 1}$. Expliquen las respuestas.

a. La función $f(x)$ es homográfica. ☐

b. El dominio de la función es $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$. ☐

c. El punto $\left(1; -\frac{1}{5}\right)$ pertenece a la función. ☐

d. La gráfica de $f(x)$ corta al eje y en 2. ☐

e. La gráfica de $f(x)$ no corta al eje x. ☐

f. La imagen de $f(x)$ es $I_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. ☐

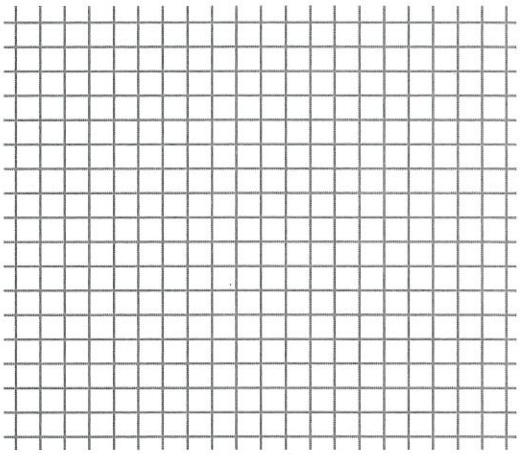
g. La función tiene una asíntota vertical en $x = 8$. ☐

17. Función homográfica

51. Completen lo pedido para cada función. Luego, grafiquen.

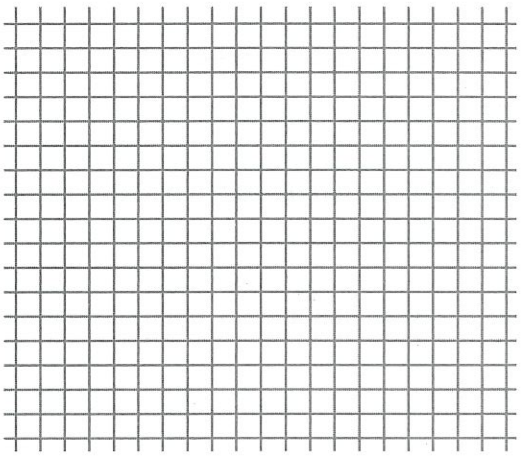
a. $f(x) = \frac{5x - 10}{x - 1}$

- $D_f =$
- A.V. =
- A.H. =
- $f(0) =$
- $C_0 =$
- $I_f =$



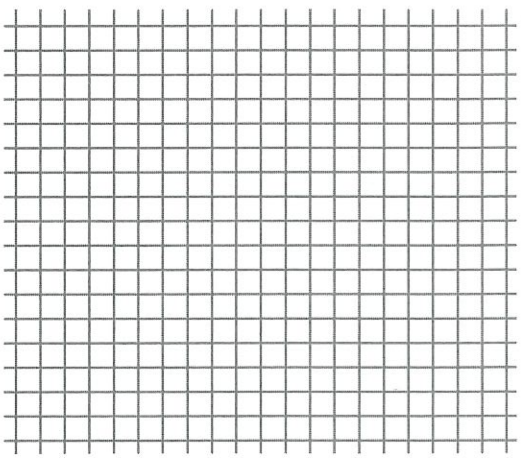
b. $f(x) = \frac{2x + 8}{x + 4}$

- $D_f =$
- A.V. =
- A.H. =
- $f(0) =$
- $C_0 =$
- $I_f =$



c. $f(x) = \frac{15 - 10x}{5x + 10}$

- $D_f =$
- A.V. =
- A.H. =
- $f(0) =$
- $C_0 =$
- $I_f =$



17. Función homográfica

52. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{4x - 11}{6 - 2x}$?

b. ¿En qué punto corta al eje x la gráfica de $f(x) = \frac{-4x + 12}{x + 9}$?

c. ¿Cuánto debe valer "k" para que la función $f(x) = \frac{kx + 3}{5x + 7}$ tenga por imagen $I_f = \mathbf{R} - \{-1\}$?

d. ¿Es cierto que la gráfica de $f(x) = \frac{6 + 7x}{x + 12}$ corta al eje y en $\frac{1}{2}$?

e. ¿Cuánto debe valer "m" para que el dominio de $f(x) = \frac{x + 1}{3x - m}$ sea $D_f = \mathbf{R} - \{9\}$?

f. ¿Cuál es el conjunto de positividad de la función $f(x) = \frac{x - 3}{x + 4}$?

g. ¿Cuál es el conjunto de decrecimiento de la función $f(x) = \frac{-2x - 1}{x - 2}$?

h. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{-6x + 9}{10x - 0{,}1}$?

i. ¿Cuál es la ecuación de la asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x - 8}{\frac{1}{9}x + 4}$?

18. Estudio de funciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Para graficar una función es necesario hacer un estudio completo analizando los elementos principales de cada una. Es recomendable seguir los siguientes pasos:

1. Identificar el tipo de función (esto permite reconocer qué elementos específicos de la función será necesario encontrar y cómo será su gráfica).
2. Definir el dominio (D_f) de la función para los cuales está definida.
3. Buscar las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes:
   - Con el eje x (raíces o ceros de la función) $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ resolver $f(x) = 0 \Rightarrow$ es el punto $(x_r; 0)$.
   - Con el eje y (ordenada al origen) $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ calcular $f(0) \Rightarrow$ es el punto $(0; y)$.
4. Hallar las asíntotas, en el caso que existan:
   - Asíntota vertical $\Rightarrow x = k$
   - Asíntota horizontal $\Rightarrow y = b$.
5. Hallar la imagen (I_f) de la función.
6. Encontrar conjuntos de positividad (C^+) y negatividad (C^-):
   - $C^+ = \{x \in D_f / f(x) > 0\}$
   - $C^- = \{x \in D_f / f(x) < 0\}$.
7. Encontrar conjuntos (o intervalos) de crecimiento ($C^\nearrow$) y de decrecimiento ($C^\searrow$):
   - f es creciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
   - f es decreciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Existen otros elementos específicos, según el tipo de función. Por ejemplo, si es una función cuadrática, es necesario buscar el vértice para poder graficarla; si es una función polinómica, al buscar las raíces, se debe indicar el orden de multiplicidad de cada una, ya que nos informa el comportamiento de la gráfica en ese punto; en el caso de la función por partes es importante encontrar las imágenes en los extremos de cada tramo, etc.

Función	$f(x) = \frac{x+6}{x-3}$	$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2+1 & x \geq -1 \\ -x+4 & x < -1 \end{cases}$
Tipo de función	Homográfica	Por partes Tramo 1: cuadrática Tramo 2: lineal
Dominio	$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$	$D_f = \mathbb{R}$
Intersección con ejes (Raíz y ordenada al origen)	$f(0) = \frac{0+6}{0-3} \rightarrow f(0) = -2$ $\frac{x+6}{x-3} = 0 \rightarrow x + 6 = 0 \rightarrow x = -6$	$f(0) = (0-1)^2 + 1 \rightarrow f(0) = 2$ $(x-1)^2 + 1 = 0 \rightarrow$ No tiene raíz real $-x + 4 = 0 \rightarrow x = 4$ No está definida para $x = 4$
Asíntotas	A.V. en $x = 3$ A.H. en $y = 1$	No tiene
Imagen	$I_f = \mathbb{R} - \{1\}$	$I_f = [1; +\infty)$
Conjuntos de positividad y negatividad	$C^+ = (-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$ $C^- = (-6; 3)$	$C^+ = \mathbb{R}$ $C^- = \emptyset$
Intervalos de crecimiento y decrecimiento	$C^\nearrow = \emptyset$ $C^\searrow = \mathbb{R} - \{3\}$	$C^\nearrow = (1; +\infty)$ $C^\searrow = (-\infty; 1)$
Otros elementos	$f(4) = \frac{x+6}{x-3} = 10 \rightarrow$ punto $(4; 10)$	Vértice parábola $v = (1; 1)$

18. Estudio de funciones

Test de comprensión

53. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Por qué es necesario definir primero el dominio de validez?

b. ¿Alcanza para graficar una función buscar solamente la intersección con los ejes?

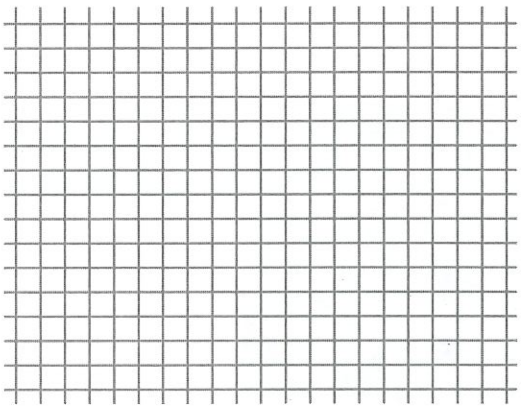
c. ¿Cuáles son los elementos que se necesita buscar para graficar una función polinómica?

54. Completen la tabla.

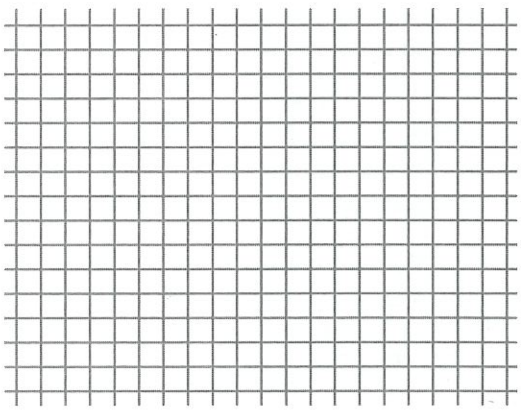
Función	Tipo	Dominio	Imagen	Raíces	Ordenada al origen	Asíntotas
$f(x) = 2x(x + 6)$						
$f(x) = \frac{3}{x+1}$						
$f(x) = E(x + 2)$						
$f(x) = 3x^3 - 12x$						

55. Realicen el análisis completo de las funciones. Luego, grafíquenlas.

a. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 1 \\ 2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$



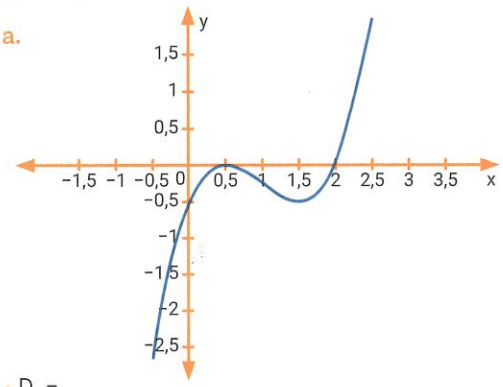
b. $f(x) = -(x + 2)^2 \cdot (x - 4)^2$



Integración final

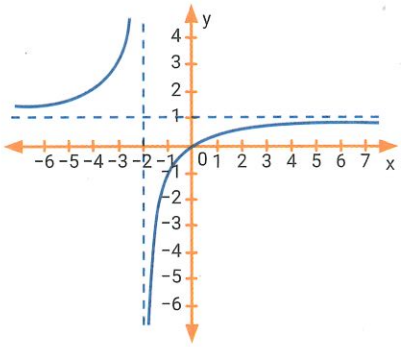
56. Completen lo pedido a partir del gráfico.

a.



- D_f =
- I_f =
- f(0) =
- C_0 =
- C^+ =
- C^- =

b.



- D_f =
- I_f =
- f(0) =
- C_0 =
- Asíntotas:
- $C^{\nearrow}$ =
- $C^{\searrow}$ =

57. Aproximen el gráfico de una función polinómica que cumpla lo pedido en cada caso.

a. $C_0 = \{-6; -2\}$; $C^- = \emptyset$ y f(0) = −2.

b. Tiene una raíz en x = 3 (doble) y x = −2 (simple) y corta al eje y en 1.

c. Tiene 3 raíces simples en −1; 1 y 4; y f(−2) = 5.

d. $C^+ = (-3; -1) \cup (1; 3)$ y f(0) = −1.

58. Escriban V (verdadero) o F (falso), sabiendo que $f(x) = -(x + 4)^2 . (x - 1) . (x - 2)$. Expliquen las respuestas.

a. f(x) es de grado 2. ☐

b. Las raíces de f(x) son −4; 1 y 2. ☐

c. Las tres raíces de f(x) son dobles. ☐

d. El dominio de f(x) es $D_f = \mathbb{R} - \{-4; 1; 2\}$. ☐

e. El coeficiente principal es a = −1. ☐

f. El conjunto $C^+ = \emptyset$. ☐

59. Para cada una de las siguientes funciones indiquen: dominio, raíces y ordenada al origen.

a. $f(x) = -2x . (x - 2)^2 . (x + 1)$

b. $f(x) = \frac{2 - 2x}{4 + x}$

c. $f(x) = (x + 3) . (x^2 + 4)$

d. $f(x) = -\frac{3}{x}$

60. Grafiquen las siguientes funciones realizando previamente un análisis completo.

a. $f(x) = -x^4 + x^2$

b. $f(x) = (x + 5) . (x - 1) . (x - 2)$

c. $f(x) = -(x + 4) . (x^2 - 2)$

d. $f(x) = 4 . (x + 2) . (x - 6) . (x - 3)$

e. $f(x) = \frac{3x}{x - 6}$

f. $f(x) = \frac{4x + 4}{2x - 2}$

g. $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 4}$

h. $f(x) = \frac{x + 6}{3x - 6}$

61. Elijan la opción que cumple lo pedido en cada caso.

a. Tiene A.V. en $x = 6$.

- $f(x) = \frac{x - 6}{x + 3}$ ☐
- $f(x) = \frac{x + 3}{x - 6}$ ☐

b. Tiene por dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-8; 8\}$.

- $f(x) = \frac{x}{x^2 + 64}$ ☐
- $f(x) = \frac{x}{64 - x^2}$ ☐

c. Tiene A.H. en $y = -1$.

- $f(x) = \frac{-x + 2}{x}$ ☐
- $f(x) = \frac{x - 1}{x}$ ☐

d. Tiene imagen $I_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

- $f(x) = \frac{5x}{2}$ ☐
- $f(x) = \frac{2}{5x}$ ☐

62. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. La función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 6x + 8}$ tiene dominio $D_f = \{-2; -4\}$. ☐

b. La función $f(x) = \frac{7x + 11}{12 - x}$ tiene una asíntota vertical $x = 12$. ☐

c. La función $f(x) = \frac{8}{2x.(x + 7)}$ corta al eje x en 8. ☐

d. La función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^4 + 1}$ no tiene asíntota horizontal. ☐

e. La función $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 16}$ no tiene asíntota vertical. ☐

63. Reconstruyan la fórmula de cada función. Luego, indiquen si es única.

a. Función polinómica con tres raíces simples iguales a −2, 5 y 7 que pasa por el punto (1; 36).

b. Función homográfica con A.V. en $x = 8$ y A.H. en $y = -2$, cuya gráfica corta al eje x en 3.

c. Función racional con $D_f = \mathbb{R}$, A.H. en $y = 0$ y que cumple $f(0) = 7$.

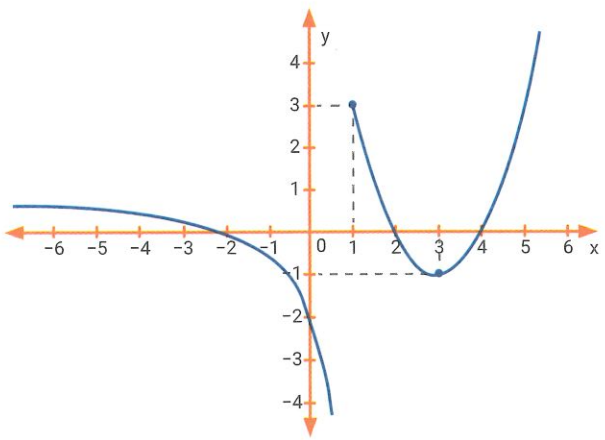
d. Función por tramos, que cumple que para el intervalo $(2; +\infty)$ es una función cuadrática con vértice $(1; -1)$ y pasa por el punto $(3; 11)$ y para el intervalo $(-\infty; 2]$ es una función lineal que pasa por los puntos $(-1; -1)$ y $(5; 17)$.

64. Analicen y grafiquen las funciones por partes.

a. $$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x + 3}{x + 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b. $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 12 & \text{si } x \geq -3 \\ 2 & \text{si } x < -3 \end{cases}$$

65. Realicen un análisis completo de la función.



Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Función

Una **función** es una relación entre **dos variables** [generalmente llamadas "**x**" (variable independiente) e "**y**" (variable dependiente)], donde a cada valor de la primera "x" le corresponde **un único valor** de la segunda "y".

Estas condiciones que deben cumplir las relaciones para ser funciones reciben el nombre de: **unicidad y existencia.**

$$f: A \to B \text{ es función de A en B} \Leftrightarrow \forall x \in A \; \exists! \; y \in B \; / \; y = f(x)$$

"y" es la **imagen** de "x" (es el transformado de "x" según "f");
"x" es la **preimagen** de "y".
A y B son el **dominio y codominio**, respectivamente, de la función f.

TIP

$\forall$ significa para todo.
$\exists!$ significa existe y es único.

Conjunto dominio, codominio e imagen de una función

- El conjunto **dominio** (o simplemente dominio de la función) es el conjunto formado por los valores de la variable "x". Se designa Dm o D_f.
- El conjunto **codominio** (o simplemente codominio de la función) está formado por todos los valores que puede tomar la variable dependiente "y"; se designa C_f.
- El conjunto **imagen** (o simplemente imagen de la función) es un subconjunto del codominio y está formado por los valores de "y" que toma la función; se designa Im o I_f.

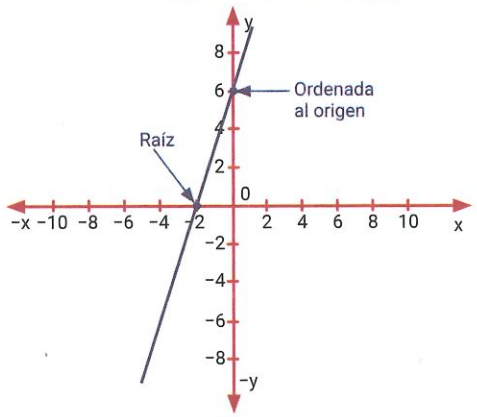
La **representación gráfica** de una función es el conjunto de todos los puntos de coordenadas (x; y) ubicados en el plano cartesiano, para los cuales **y = f(x).**

El plano cartesiano está determinado por un **sistema de coordenadas cartesianas** (llamado también ejes cartesianos) formado por dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto llamado **origen de coordenadas.**

El **eje horizontal** se llama **eje x** o **eje de abscisas**. El **eje vertical** se llama **eje y** o **eje de ordenadas.**

Raíces (o ceros) de una función. Ordenada al origen

- Las **raíces** de una función y = f(x) son los valores x en los cuales f(x) es igual a 0.
- La **ordenada al origen** es el valor de y para x = 0.



3 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

66. ¿Cuál es la fórmula de una función módulo que se desplaza 6 unidades hacia arriba respecto de la función $y = |x|$?

◯ $y = |6x|$ ◯ $y = 6 . |x|$ ◯ $y = |x| - 6$ ◯ $y = |x| + 6$

67. ¿Cuál es el resultado de $f(2{,}37)$ sabiendo que $f(x) = E(x - 1)$?

◯ 2 ◯ 1 ◯ −1 ◯ −2

68. ¿Cuál es el valor de $f(3)$ para la siguiente función?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x \geq 3 \\ 6 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

◯ 6 ◯ −6 ◯ 12 ◯ −12

69. ¿Cuál es el conjunto de raíces C_0 de la función $f(x) = 7 . (x + 3) . (x - 5) . (x^2 + 1)$?

◯ $C_0 = \{3; -5\}$ ◯ $C_0 = \{-3; 5\}$ ◯ $C_0 = \emptyset$ ◯ $C_0 = \{-3; 5; 1; -1\}$

70. ¿Cuál es el conjunto de positividad C^+ de la función $f(x) = -x^4 . (x - 7)^2$?

◯ $C^+ = \emptyset$ ◯ $C^+ = (0; 7)$ ◯ $C^+ = (0; -7)$ ◯ $C^+ = (-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$

71. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{x + 7}{x^2 - 25}$?

◯ $D_f = \mathbb{R}$ ◯ $D_f = \{-5; 5\}$ ◯ $D_f = \mathbb{R} - \{-5; 5\}$ ◯ $D_f = \emptyset$

72. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x + 9}{4 - x}$?

◯ $x = 4; y = 1$ ◯ $x = 4; y = -1$ ◯ $x = -1; y = 4$ ◯ $x = 1; y = -4$

73. ¿Cuál es la raíz de $f(x) = \frac{5}{2x - 8}$?

◯ 5 ◯ −5 ◯ 4 ◯ No tiene.

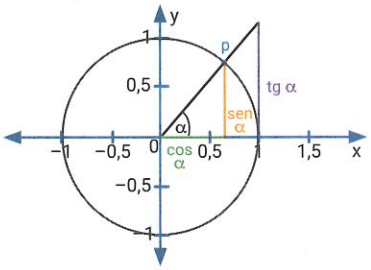
4 Funciones trigonométricas

19. Funciones trigonométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

Las **funciones trigonométricas** son funciones periódicas cuyos valores son extensiones del concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo trazado en una circunferencia trigonométrica.

El lado terminal del ángulo corta a la circunferencia (radio = 1) en el punto p de coordenadas (x; y).



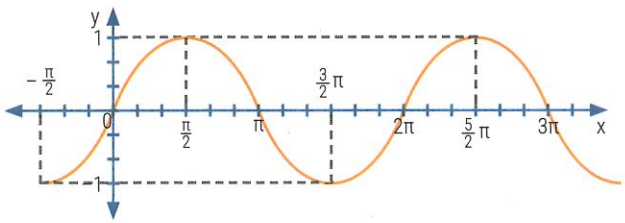
Para recordar pág. 87

$\text{sen}\ \hat{\alpha} = \frac{y}{r} \Rightarrow \textbf{sen}\ \hat{\alpha} = \textbf{y}$

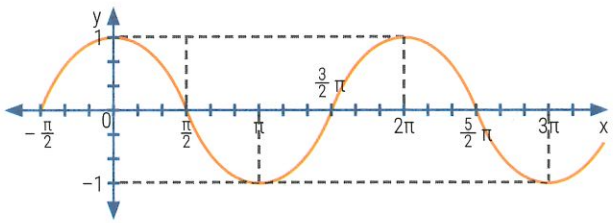
$\cos \hat{\alpha} = \frac{x}{r} \Rightarrow \textbf{cos}\ \hat{\alpha} = \textbf{x}$

Representación gráfica de las funciones trigonométricas

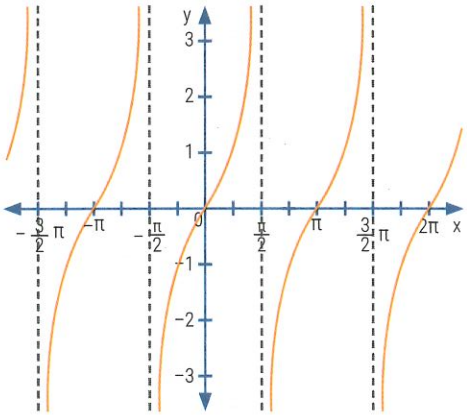
1. $f(x) = \text{sen}\ x$ / $f: \mathbb{R} \to [-1; 1]$



2. $f(x) = \cos x$ / $f: \mathbb{R} \to [-1; 1]$



3. $f(x) = \tan x$ /
$f: \mathbb{R} \to \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \wedge k \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Variaciones de la función seno y coseno

$f(x) = A.\text{sen}\ (Bx + C) + D$ $\quad$ $g(x) = A.\cos\ (Bx + C) + D$

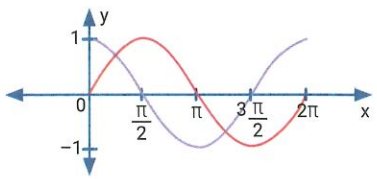
El **|A|** determina la amplitud y es la semidistancia entre el máximo y el mínimo de la función.

B modifica el período de la función sin modificar su amplitud.

Período: $T = \frac{2\pi}{|B|}$

C determina el ángulo de fase indicando el desplazamiento horizontal (desplazamiento con respecto al eje x). Ángulo de fase: $-\frac{C}{B}$

D determina el desplazamiento vertical (desplazamiento respecto al eje y).



Dinámica TConecta

Ingresen a puerto.pub/amfrefa * para mirar un video acerca de la amplitud, frecuencia y fase de la función seno.

* Enlace acortado de https://youtu.be/iwEFoWOS2UE

ACTIVIDADES

19. Funciones trigonométricas

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

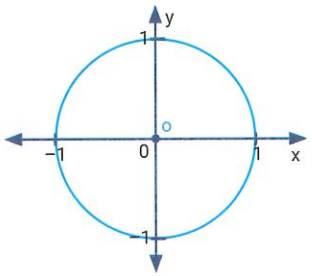
a. ¿Es cierto que el valor máximo de $y = 3 \cdot \operatorname{sen} x$ es 3?

b. ¿Cuál es la imagen de $x = \frac{5}{2}\pi$ en la función $f(x) = \tan x$?

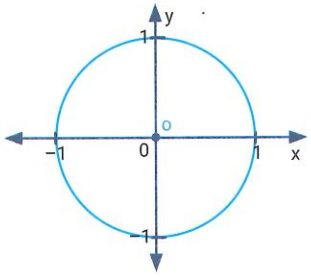
c. ¿Existen valores de $x \in (0; 2\pi)$ para los cuales $\operatorname{sen} x = \cos x$?

2. Dibujen en cada circunferencia trigonométrica un ángulo en el cuadrante pedido. Luego, marquen con colores los segmentos que representan el seno y el coseno del ángulo.

a. II cuadrante.



b. IV cuadrante.



3. Completen con el signo + (positivo) o − (negativo) según el cuadrante al que pertenezca el ángulo α.

Cuadrante	Signo		
	sen $\hat{\alpha}$	cos $\hat{\alpha}$	tg $\hat{\alpha}$
I			
II			
III			
IV			

4. Encuentren la imagen pedida en cada caso.

a. $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f(\pi) =$ ☐

b. $f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen} x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ ☐

c. $f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(2\pi) =$ ☐

d. $f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) =$ ☐

e. $f(x) = 2 \cdot \cos x \Rightarrow f(\pi) =$ ☐

f. $f(x) = \cos 2x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ☐

5. Encuentren los valores de $x \in [0; 2\pi]$ siendo $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ y $f_2(x) = \cos x$.

a. $f_1(x) = 1$

b. $f_1(x) = -1$

c. $f_1(x) = 0$

d. $f_2(x) = 1$

e. $f_2(x) = -1$

f. $f_2(x) = 0$

6. Completen la tabla.

Función	Amplitud A	Período t	Ángulo de fase	Desplazamiento vertical
$f(x) = 4 \cdot \operatorname{sen} x - 5$				
$f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}(\pi + 2x) + 2$				
$f(x) = \cos\left(6x - \frac{\pi}{2}\right)$				
$f(x) = 2 \cdot \cos\frac{x}{2} + 1$				

7. Reconstruyan la fórmula de cada función usando los datos dados.

a. $f(x) = A \cdot \operatorname{sen}(Bx + C) + D$

- $A = 1$; $T = \frac{\pi}{4}$; ángulo de fase: $\frac{\pi}{8}$; desplazamiento: 2 hacia arriba.

- $A = 5$; $T = 2\pi$; ángulo de fase: 0; desplazamiento: 3 hacia abajo.

b. $f(x) = A \cdot \cos(Bx + C) + D$

- $A = 0{,}5$; $T = 4\pi$; ángulo de fase: 0; desplazamiento: 8 hacia abajo.

- $A = 7$; $T = \frac{2\pi}{7}$; ángulo de fase: $-\frac{\pi}{28}$; desplazamiento: ninguno.

8. Respondan las siguientes preguntas. Luego, comparen las respuestas con sus compañeros.

a. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, ¿cuál es el valor de x para que $f(x) = -2$?

b. La función $7 + \cos x$, ¿se desplaza horizontalmente?

c. $f(x) = 4 \cdot \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 4 \cdot \cos x$, ¿tienen la misma imagen?

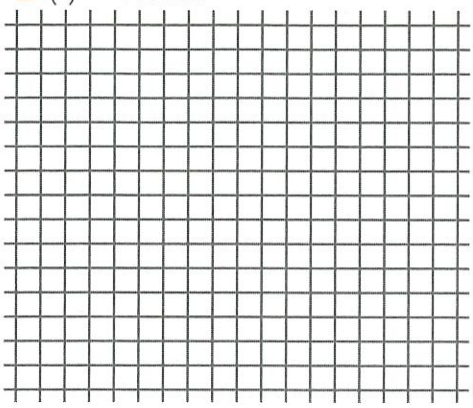
d. $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ y $g(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x$, ¿tienen el mismo período?

9. Tracen en sus carpetas, en un mismo sistema, la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$; de las funciones $g(x) = \operatorname{sen}(-x)$ y $h(x) = -\operatorname{sen} x$. Luego, escriban qué resulta de comparar las gráficas de g(x) y h(x).

19. Funciones trigonométricas

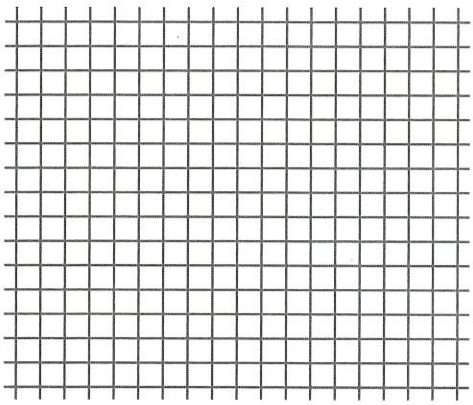
10. Grafiquen las siguientes funciones e indiquen su dominio y su imagen.

a. $f(x) = -5 . \text{sen } x$



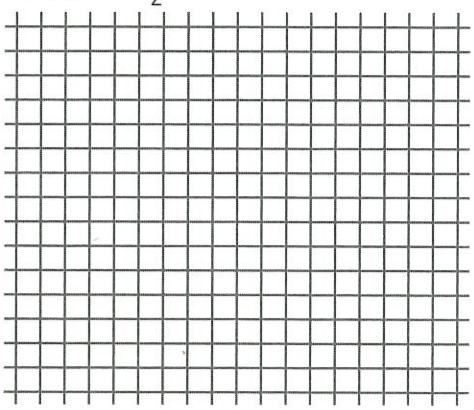
$D_f =$ $\quad$ Im =

b. $f(x) = 2 . \cos x + 3$



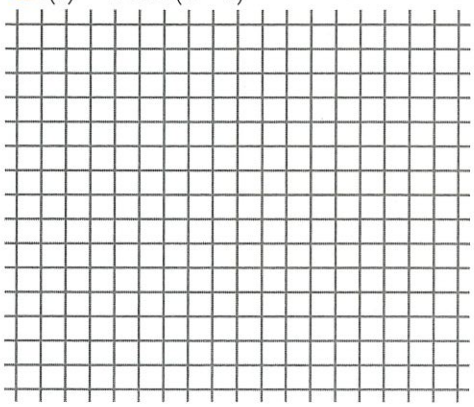
$D_f =$ $\quad$ Im =

c. $f(x) = \text{sen } \frac{x}{2} + 1$



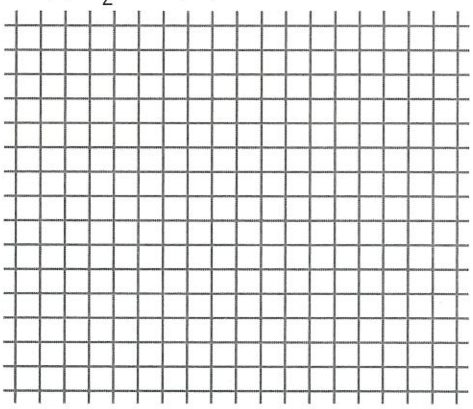
$D_f =$ $\quad$ Im =

d. $f(x) = 4 . \cos (x - \pi)$



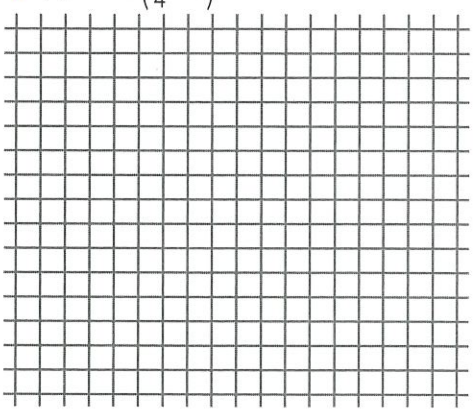
$D_f =$ $\quad$ Im =

e. $f(x) = \frac{1}{2} . \text{sen } (6x)$



$D_f =$ $\quad$ Im =

f. $f(x) = \cos \left(\frac{\pi}{4} + x\right)$



$D_f =$ $\quad$ Im =

20. Interpretación y análisis de funciones trigonométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

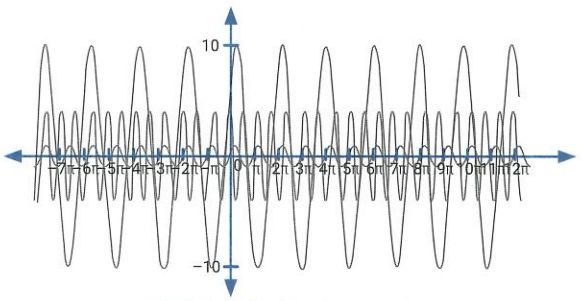
Interpretar y analizar una función trigonométrica consiste en describir su comportamiento en contextos concretos.

En particular, para estas funciones es importante tener en cuenta:

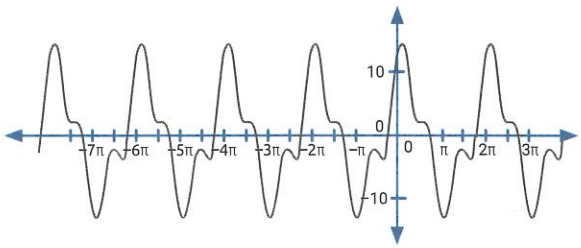
- La amplitud de la onda.
- El período de la onda.
- El ángulo de fase.
- El desplazamiento.
- Las intersecciones con los ejes.
- Los máximos y mínimos.

Áreas dinámicas [Matemática y Física]

Las ondas sonoras pueden ser representadas por sumas de ondas sinusoidales (seno). La función seno genera el sonido más puro y con la suma de varias funciones seno se puede crear el efecto de un piano, de un violín o de un clarinete.

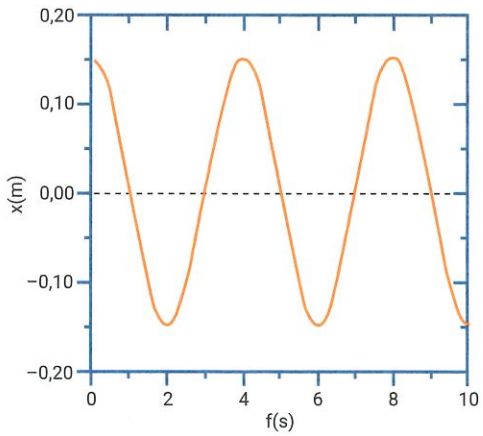


3 ondas, 3 funciones seno.



onda resultante de la suma de las funciones seno.

Un objeto se encuentra atado al extremo de un resorte.
El siguiente gráfico representa la elongación en función del tiempo.



El oscilador en t = 0 s se encuentra a 0,15 m.
La amplitud es A = 0,15 m.
En el instante t = 1 s, "p" pasa por la posición de equilibrio.
Vuelve a su máxima elongación a los 4 s. El período es T = 4 s

20. Interpretación y análisis de funciones trigonométricas

Test de comprensión

11. Respondan y expliquen las respuestas.

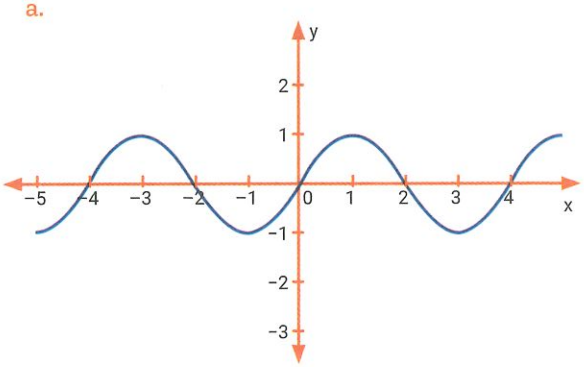
a. ¿Es cierto que la gráfica de una función $f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C) + D$ siempre corta al eje x?

b. ¿Es cierto que los mínimos de la función $y = \cos x + 1$ son sus raíces?

c. Si la frecuencia f de una onda se obtiene hallando $f = \frac{1}{T}$, ¿es cierto que la frecuencia para T = 0,5 es 2?

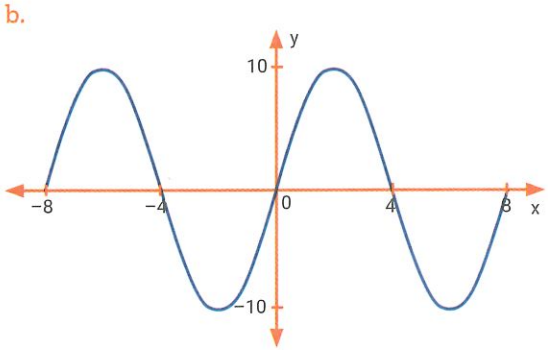
12. Completen lo pedido en cada caso.

a.



- Amplitud (A):
- Período (T):
- Frecuencia (f):

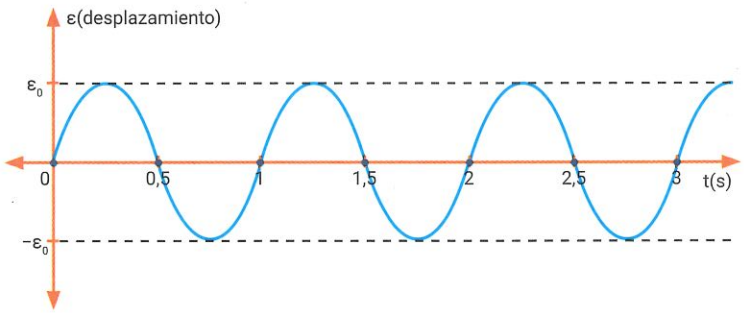
b.



- Amplitud (A):
- Período (T):
- Frecuencia (f):

13. Lean atentamente, observen el gráfico y respondan.

En el siguiente gráfico la onda representa el desplazamiento respecto a su posición original de las partículas del aire al recibir las vibraciones que surgen de la emisión de un sonido.



a. ¿Cuál es su período? _____

b. ¿Cuál es el máximo desplazamiento? _____

c. ¿Cuál es su frecuencia? _____

d. ¿Cada cuánto la partícula vuelve a su posición original? _____

21. Funciones trigonométricas inversas

▶ SABERES DINÁMICOS

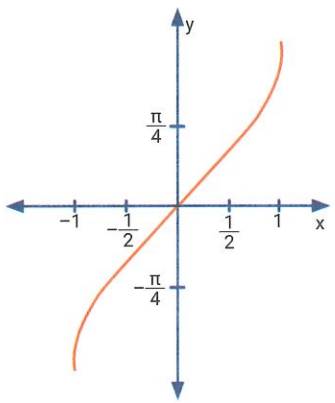
Las funciones trigonométricas no son funciones biyectivas (1 a 1), por lo que no son invertibles. Para que lo sean y poder hallar $f^{-1}(x)$ es necesario restringir su dominio y así poder hallar la función inversa. Las **funciones inversas** son: arco seno (**arc sen** o **sen^{-1}**), arco coseno (**arc cos** o **cos^{-1}**) y arco tangente (**arc tg** o **tg^{-1}**).

Para recordar pág. 87

$f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$ / $f(x) = \text{sen } x$

$\mathbf{f^{-1}: [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$ / $\mathbf{f^{-1}(x) = \text{arc sen } x}$

La función es **continua** y **creciente** en todo el dominio.



$\text{sen } \hat{\alpha} = x \Leftrightarrow \text{arc sen } x = \hat{\alpha}$

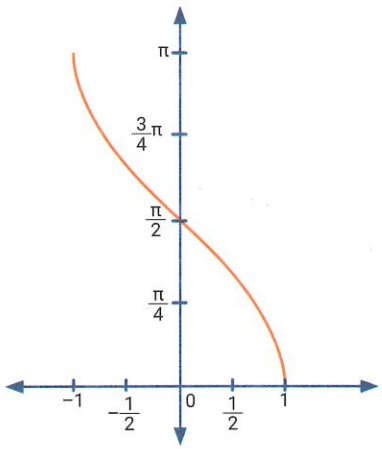
$f(x) = \text{sen } x \wedge f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{arc sen } \frac{1}{2}$

$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30° = \frac{\pi}{6}$

$f: [0; \pi] \to [-1;1]$ / $f(x) = \cos x$

$\mathbf{f^{-1}: [-1; 1] \to [0; \pi]}$ / $\mathbf{f^{-1}(x) = \text{arc cos } x}$

La función es **continua** y **decreciente** en todo el dominio.



$\cos \hat{\alpha} = x \Leftrightarrow \text{arc cos } x = \hat{\alpha}$

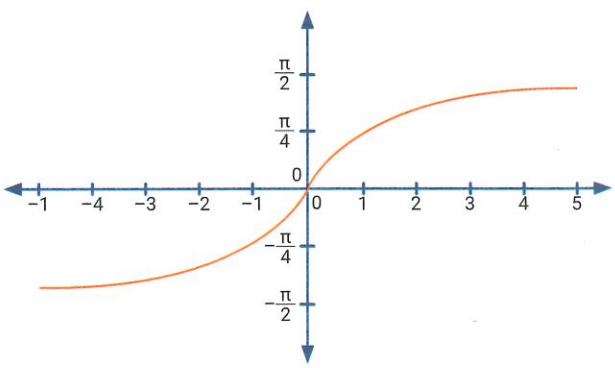
$f(x) = \cos x \wedge f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \text{arc cos } \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45° = \frac{\pi}{4}$

$f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ / $f(x) = \text{tg } x$

$\mathbf{f^{-1}: R \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$ / $\mathbf{f^{-1}(x) = \text{arc tg } x}$

La función es **continua** y **creciente** en todo el dominio.



$\text{tg } \hat{\alpha} = x \Leftrightarrow \text{arc tg } x = \hat{\alpha}$

$f(x) = \text{tg } x \wedge f(x) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = \text{arc tg } 1$

$f^{-1}(1) = 45° = \frac{\pi}{4}$

ACTIVIDADES

21. Funciones trigonométricas inversas

Test de comprensión

14. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que si $f(x) = \cos x$ y $f(x) = 0$, entonces $f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$?

b. ¿Es cierto que la función $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$ tiene un máximo?

c. ¿Es cierto que la función $f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$ tiene una asíntota horizontal en $y = \frac{\pi}{2}$?

15. Calculen con la calculadora el valor del ángulo x en el sistema sexagesimal y unan con flechas.

a. $\text{sen } x = 1$	• 45°
b. $\cos x = -0{,}3$	• 90°
c. $\text{tg } x = 2{,}5$	• 68° 11′ 55″
d. $\text{sen } x = -0{,}2$	• 75° 57′ 50″
e. $\cos x = 0$	• −11° 32′ 13″
f. $\text{tg } x = 4$	• 107° 27′ 27″

16. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. Si $f(x) = \text{sen } x$ y $f(x) = 2$, no existe valor de x que lo verifique. ☐

b. Si $f(x) = \cos x$ y $f(x) = 1$, entonces $f^{-1}(1) = 0$. ☐

c. La función $f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$ tiene $Dm = [-\pi; \pi]$. ☐

d. La función $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$ es discontinua. ☐

e. Si $f(x) = \text{arc tg } x$ y $f(x) = -2$; entonces $x = 63° 26′ 5{,}82″$. ☐

f. La función $f(x) = \text{arc cos } x$ es continua y creciente. ☐

17. Encuentren m en cada caso, cuando sea posible.

a. $m = \text{sen (arc sen } 0{,}3)$

b. $m = \cos (\text{arc tg } 1)$

c. $m = \text{arc cos (sen } \pi)$

d. $m = \text{tg (arc sen } 1)$

e. $m = \text{arc sen}\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)$

f. $m = \text{tg (arc tg } 6{,}1)$

DinámicaMente

Hallen el dominio e imagen de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \text{arc cos } \frac{6x - 5}{7}$$

22. Ecuaciones trigonométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

Las **ecuaciones trigonométricas** son aquellas en las que las incógnitas son ángulos que forman parte del argumento de funciones trigonométricas. Su solución es, si existen, el o los valores angulares que la verifican.

$2 . \operatorname{sen} x = 1{,}5$ $\qquad \cos(2x) + \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{9}$ $\qquad 2 . \operatorname{tg} x + 1 = 7$

En las ecuaciones trigonométricas pueden aparecer distintas funciones trigonométricas y/o distintos argumentos; por eso es conveniente recordar algunas relaciones para tener en cuenta al momento de resolverlas:

- **Relaciones trigonométricas.**

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$

$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$

$\cos x = \frac{1}{\sec x}$

- **Relaciones entre ángulos complementarios, ángulos opuestos y el doble de un ángulo.**

$\operatorname{sen} x = \cos(90° - x)$
$\cos x = \operatorname{sen}(90° - x)$

$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$
$\cos x = \cos(-x)$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
$\operatorname{sen}(2x) = 2 . \operatorname{sen} x . \cos x$

- **La solución de la ecuación debe incluir todos los ángulos que pertenecen al intervalo pedido que la verifican.**

- **En algunas ocasiones es conveniente hacer un cambio de variable.**

Algunos ejemplos resueltos para $x \in [0; 2\pi]$		
Ecuación	$(\operatorname{sen} x - 1) . (\operatorname{sen} x + 1) + 2 = \frac{5}{4}$	$\operatorname{tg} x = 56 - \operatorname{tg}^2 x$
Resolución	$\operatorname{sen}^2 x - 1 + 2 = \frac{5}{4}$ $\operatorname{sen}^2 x + 1 = \frac{5}{4}$ $\operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$ $\lvert\operatorname{sen} x\rvert = \sqrt{\frac{1}{4}}$ $\operatorname{sen} x = \pm\frac{1}{2}$ $x = \text{arc sen} \pm\frac{1}{2}$	$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 56 = 0$ $\operatorname{tg} x = m$ $m^2 + m - 56 = 0$ $m_1 = 7 \vee m_2 = -8$ $\operatorname{tg} x = 7 \vee \operatorname{tg} x = -8$ $x = \text{arc tg } 7 \vee x = \text{arc tg } -8$
Solución	$x_1 = 30°$ $\quad x_3 = 210°$ $x_2 = 150°$ $\quad x_4 = 330°$	$x_1 = 87° 52' 12''$ $\quad x_3 = 97° 7' 30''$ $x_2 = 261° 52' 12''$ $\quad x_4 = 277° 7' 30''$

22. Ecuaciones trigonométricas

Test de comprensión

18. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que sen x = sen (180° − x)? Si es así, den un ejemplo.

b. ¿Qué relación existe entre cos x y cos (180° − x)?

c. ¿Es cierto que todas las ecuaciones trigonométricas tienen solución?

19. Hallen el valor de x en el intervalo pedido.

a. $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \in [0; \pi]$

b. $\cos x = 0 \wedge x \in [0; 4\pi]$

c. $\operatorname{tg} x = 1 \wedge x \in [0; 2\pi]$

d. $\operatorname{sen} x = -1 \wedge x \in [0; \pi]$

e. $\cos x = 1 \wedge x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

f. $\operatorname{tg} x = 0 \wedge x \in [0; 2\pi]$

20. Calculen las raíces en el intervalo [0°; 360°] de las siguientes funciones trigonométricas.

a. $f(x) = 4 . \operatorname{sen} x - 1$

b. $f(x) = 2 . \operatorname{tg} x + 3$

c. $f(x) = 2 . \cos (2x + 10°) - 1$

d. $f(x) = 3 . \operatorname{cosec} x + 4$

21. Hallen analíticamente las abscisas de los puntos de intersección de las siguientes funciones en el intervalo [0; 2π].

a. $f(x) = 10 . \operatorname{sen} x \wedge g(x) = 5$

b. $f(x) = 1 + \cos x \wedge g(x) = 1$

22. Ecuaciones trigonométricas

22. Reúnanse con un compañero y construyan una ecuación trigonométrica con soluciones en el intervalo [0; 360°] que cumpla lo pedido en cada caso. Luego, indiquen si hay una única respuesta posible.

a. Tiene por solución $x = 90°$ y $x = 270°$.

b. Tiene por solución $x = 45°$ y $x = 225°$.

23. Encuentren la expresión equivalente de las siguientes igualdades en función de sen x.

a. $\cos^2 x = 2 + \operatorname{sen} x$

b. $\operatorname{tg} x \cdot \cos x + 4 = 5$

c. $\cos(90° - x) + \operatorname{cosec} x = \cos^2 x$

d. $\operatorname{cotg} x \cdot \sec x = \operatorname{sen} x$

24. Resuelvan las siguientes ecuaciones trigonométricas y escriban las soluciones que pertenecen al intervalo [0; 180°].

a. $4 \cdot \operatorname{sen}^2(-x) = 0$

b. $8 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \cos x = 1$

c. $(\cos x + 2) \cdot \cos x = 3$

d. $\operatorname{tg} x = 2 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

22. Ecuaciones trigonométricas

25. Hallen los valores de x, pertenecientes al intervalo $[0; 2\pi]$, que verifiquen cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $\frac{\text{sen } 2x}{\cos x} = \text{tg } x \,.\, \text{cotg } x$

b. $\cos(2x) \,.\, \text{sen } x + \text{sen } x = 0$

c. $\text{sen}(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$

d. $2 \,.\, \text{sen}^2 x + 3 \,.\, \cos x = 0$

e. $\frac{\text{sen}(2x)}{\cos(-x)} = 1$

f. $\frac{1}{\cos x + \text{sen } x} + 2 \,.\, \text{sen } x = 2 \,.\, \cos x$

g. $2 \,.\, \text{tg } x - 3 \,.\, \text{cotg } x - 1 = 0$

h. $\text{cotg } x \,.\, \text{sen } x + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$

Integración final

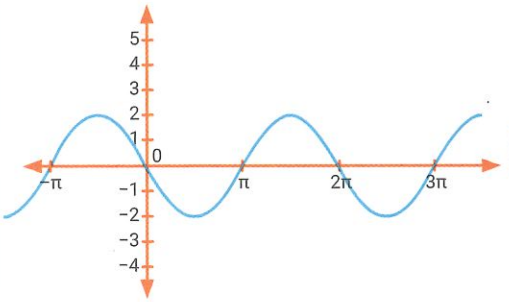
26. Completen con la letra de la función que corresponde a cada gráfico.

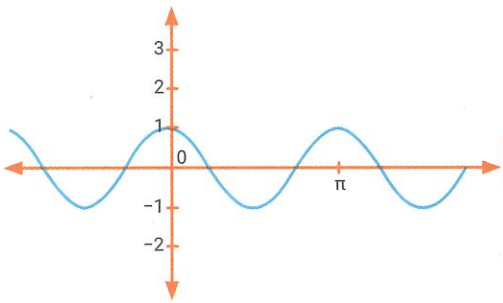
a. $f(x) = \text{sen } x - 2$

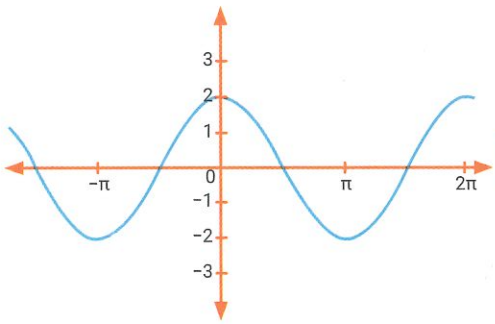
b. $f(x) = \cos(2x)$

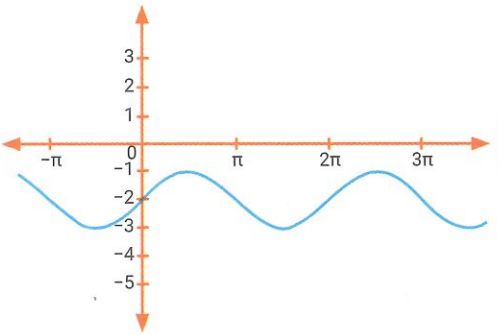
c. $f(x) = -2 . \text{sen } x$

d. $f(x) = 2 . \cos x$









27. Reconstruyan la fórmula de la función pedida en cada caso.

a. Función seno, A = 3, T = π y se desplaza una unidad hacia arriba.

b. Función coseno A = 2, T = 6π y se desplaza 4 unidades hacia abajo.

c. Completen la tabla.

Función	$y = \text{sen}(4x - 2\pi)$	$y = -7 . \cos x - 5$
A		
T		
Áng. fase		
Desp. vertical		

28. Grafiquen las siguientes funciones.

a. $f(x) = -2 . \cos(4x)$

b. $f(x) = 1 + \text{sen}(x + \pi)$

c. $f(x) = -\text{sen}(3x)$

d. $f(x) = 4 . \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

29. Escriban V (verdadero) o F (falso).

a. El período de $y = \text{tg } x$ es 2π. ☐

b. La función $y = \text{tg } x$ es continua en $[0; 2\pi]$. ☐

c. La función $f(x) = 5 . \text{sen } x$ tiene $\text{Im} = [-5; 5]$. ☐

d. El dominio de $f(x) = \cos(5x)$ es $D_f = \mathbb{R}$. ☐

e. No hay puntos en común entre las funciones $y = 3$ y $f(x) = \text{sen } x + 3$. ☐

f. La función $y = \text{arc sen } x$ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$. ☐

30. Hallen el valor p en cada caso.

a. $p = \cos(\text{arc sen } 0{,}5)$

b. $p = \text{sen}^2(\text{arc tg } 1)$

c. $p = \sec(\text{arc tg } 2)$

d. $p = \text{sen}(\text{arc cos } 1)$

e. $p = \text{cosec}(\text{arc sen } 0{,}1)$

31. Lean atentamente, planteen y resuelvan.

a. La función $P(t) = 100 - 20 . \cos \frac{5\pi t}{3}$ permite calcular la presión arterial P (en mm de mercurio) de una persona en reposo en función del tiempo t (en minutos).

- Hallen el período de la función.
- Calculen la presión a los 3 minutos.
- Encuentren el instante en que la presión es de 80 mm.
- Aproximen la gráfica.

b. En un movimiento armónico simple la función $p(t) = 4 . \left(\cos \frac{1}{4} t\right)$ describe la posición del objeto (en metros) en función del tiempo (en segundos).

- Hallen el período y la frecuencia.
- Hallen el instante $t \in [0; 2\pi]$ para los cuales el objeto está en la posición de equilibrio ($p = 0$).
- Aproximen la gráfica.

32. Hallen las raíces en el intervalo $[0; 180°]$ de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 1 + 2 . \text{sen}(4x)$

b. $f(x) = \cos(180° + x)$

c. $f(x) = -\text{sen}(2x - 90°) + \frac{1}{2}$

d. $f(x) = \cos(3x) - 1$

33. Encuentren las abscisas de los puntos de intersección que pertenecen al intervalo $[0; 360°]$ entre las siguientes funciones.

a. $f(x) = 3 . \text{sen } x$; $g(x) = 2$

b. $f(x) = \cos(2x)$; $g(x) = -\frac{1}{2}$

34. Resuelvan las siguientes ecuaciones e interprétenlas gráficamente para $x \in [0; 2\pi]$.

a. $\text{sen } x = \cos x$

b. $\text{tg } x = \cos x$

35. Respondan.

a. ¿Es cierto que nunca el seno de un ángulo es igual a su coseno?

b. ¿Es cierto que el coseno de los ángulos suplementarios es igual?

c. ¿Es cierto que la tangente de los ángulos opuestos es opuesta?

d. ¿Es cierto que, conociendo el seno y el coseno de un ángulo, se puede calcular la tangente?

e. Si dos ángulos son complementarios, ¿es cierto que el seno de uno es igual al coseno del otro?

36. Resuelvan las siguientes ecuaciones para $x \in [0; 2\pi]$.

a. $3 . (\text{sen}^2 x - 1) = \cos^2 x$

b. $4 . \cos x = \cos(-x) - 3$

c. $\cos(2x) = 2 - 3 . \text{sen } x$

d. $2 . \cos^2 x - \cos x = \text{sen } x . \text{cosec } x$

e. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) . \text{sen } x + 1 = 0$

f. $\text{tg } x . \text{sen } x = -\cos x$

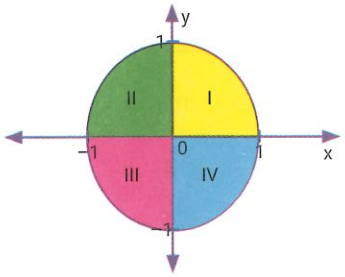
g. $\frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} - 4 . \cos x = 0$

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

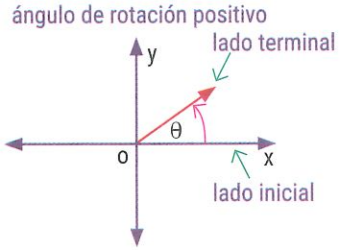
Circunferencia trigonométrica

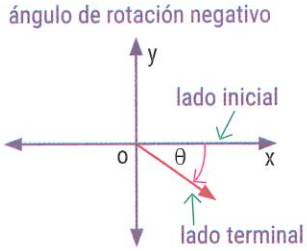
La **circunferencia trigonométrica** es una circunferencia de radio igual a uno, con su centro en el origen (0; 0) de un sistema de coordenadas cartesianas.
Los 4 cuadrantes se numeran en sentido antihorario, comenzando por el formado por los semiejes positivos.



Ángulo orientado

Se llama **ángulo orientado**, al ángulo generado por la rotación de la semirrecta ox. Por convención, un ángulo es positivo si el giro es en sentido antihorario, y negativo si el giro es en sentido horario.





Medida de los ángulos

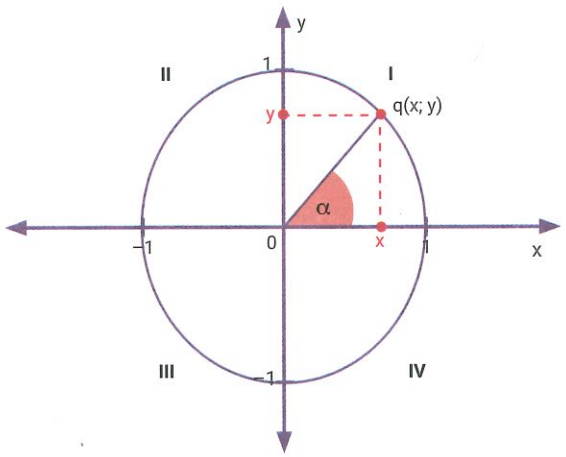
- La medida de los ángulos ubicados en una circunferencia trigonométrica se suele expresar en **radianes**.
- Equivalencias entre el sistema sexagesimal y el sistema circular:

$$180° = \pi \text{ radianes}$$

- Cuando un ángulo se expresa en radianes, en general la palabra se omite.

Razones trigonométricas definidas en la circunferencia trigonométrica

A partir del ángulo α ubicado en una circunferencia trigonométrica, se definen las razones trigonométricas del siguiente modo:



$$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{y}{r} \Rightarrow \text{sen } \hat{\alpha} = y$$

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos \hat{\alpha} = x$$

$$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan \hat{\alpha} = \frac{\text{sen } \hat{\alpha}}{\cos \hat{\alpha}}$$

4 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

37. ¿Cuál de las siguientes funciones tienen amplitud A = 6 y período T = 10π?

○ $f(x) = 6 . \text{sen}(5x)$ ○ $f(x) = 6 . \text{sen}(10x)$ ○ $f(x) = 10 . \text{sen}(6x)$ ○ $f(x) = 6 . \text{sen}\left(\frac{1}{5}x\right)$

38. ¿Cuál es la imagen de la función $f(x) = 3 . \cos(x + \pi) - 2$?

○ $\text{Im} = [-3; 3]$ ○ $\text{Im} = [-1; 1]$ ○ $\text{Im} = [-5; 1]$ ○ $\text{Im} = [-1; 5]$

39. ¿Cuál es el resultado de la ecuación $\text{tg}\, x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x$ si $x \in [\pi; 2\pi]$?

○ $x = \frac{\pi}{4}$ ○ $x = \frac{5\pi}{4}$ ○ $x = \frac{\pi}{2}$ ○ $x = \frac{5\pi}{2}$

40. ¿Cuál es el dominio de validez de la función $f^{-1}(x) = \text{arcsen}\, x$?

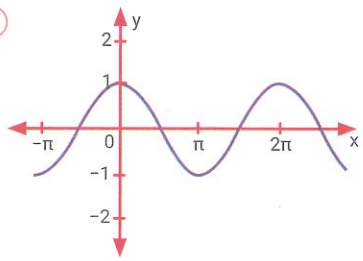
○ $\mathbb{R}$ ○ $[-1; 1]$ ○ $(-1; 1)$ ○ $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

41. ¿Cuáles son las raíces $x \in [0; \pi]$ de la función $f(x) = 2 . \cos(2x) + 1$?

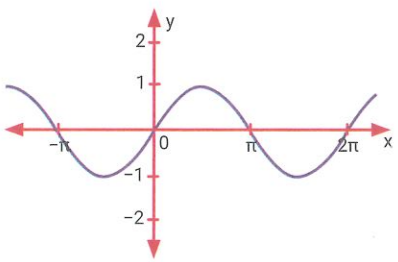
○ $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$ ○ No tiene. ○ $\frac{4\pi}{3}$ ○ $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{2\pi}{3}$

42. ¿Cuál es el gráfico de la función $f(x) = -\text{sen}\, x$?

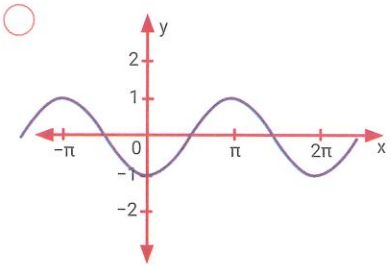
○



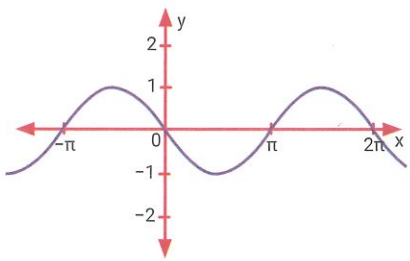
○



○



○



43. ¿Cuál es la expresión equivalente a $\cos(2x)$?

○ $\text{sen}^2 x + \cos^2 x$ ○ $2 . \text{sen}\, x . \cos x$ ○ $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$ ○ $-2 . \text{sen}\, x . \cos x$

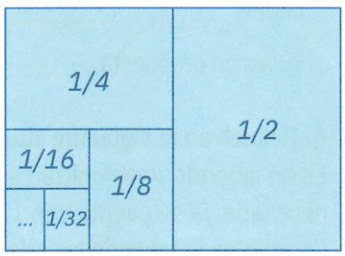
5 Límites

23. Concepto intuitivo de límite

▶ SABERES DINÁMICOS

El **concepto de límite en la vida cotidiana** se asocia a la idea de **"acercarse"** tanto como se quiera a algo, o bien, analizar **"hasta dónde"** es posible llegar cuando algo crece o decrece tanto como se pretenda.
En **matemática el concepto de límite** está íntimamente relacionado con las propiedades de **densidad y continuidad** del conjunto de los números reales (**ℝ**).
Decir que el **conjunto de los números reales** es **denso** implica que entre dos números reales siempre existe otro número real, y que es **continuo** significa que a cada punto de la recta numérica le corresponde un único número real y recíprocamente.
Algunos ejemplos pueden servir para construir el concepto de límite.

• *Si pensamos en una hoja de papel cuadrada de 1 m² de área y le quitamos la mitad, nos quedará un rectángulo de $\frac{1}{2}$ m². Si ahora a la mitad le quitamos la mitad, la nueva figura tendrá un área de $\frac{1}{4}$ m² y así sucesivamente de manera indefinida. Siempre quedará un poco de papel que se puede continuar cortando. Si ahora sumamos todos los pedacitos de papel que se han ido quitando, podemos escribir:* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=1$

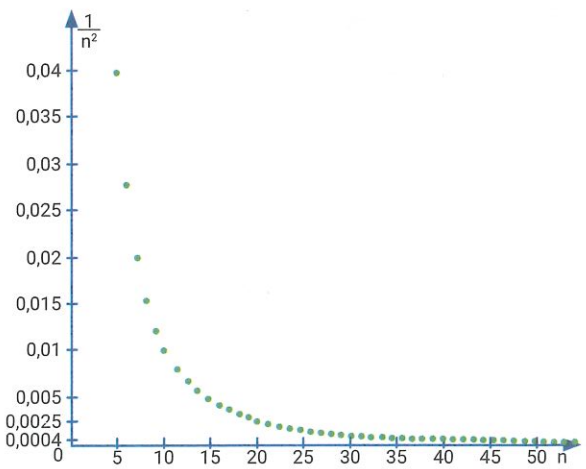


Entonces es posible concluir que el límite de la suma de los n pedacitos será 1.

• *Teniendo en cuenta la sucesión de término general* $\frac{1}{n^2}$, *podemos preguntarnos qué sucederá a medida que n toma valores cada vez más grandes; hacemos una tabla:*

n	5	10	20	50
$\frac{1}{n^2}$	0,04	0,01	0,0025	0,0004

Podemos concluir que para valores de n cada vez más grandes, los valores que toma la sucesión se aproximan cada vez más a 0, es decir, tienden a 0.



Áreas dinámicas [Matemática y Administración]

En Administración se utilizan los límites, por ejemplo, para encontrar el menor costo posible en la producción de una empresa y así generar una mayor ganancia.

ACTIVIDADES

23. Concepto intuitivo de límite

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿A qué valor tiende la sucesión de término general $\frac{1}{n}$? ¿Y la de término general $\frac{1}{n} + 2$?

b. ¿Cuál es el límite de la sucesión que representa el área de un polígono de n lados inscripto en una circunferencia de radio 1 cm?

c. ¿Qué sucede con los términos de la sucesión $(-1)^n$ cuando n crece? ¿Cuál es el límite?

2. Indiquen el límite de cada una de las siguientes sucesiones, cuando sea posible.

a. $\frac{1}{n+1}$ _____

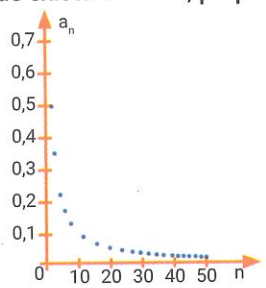
b. $1 - \frac{2}{n}$ _____

c. 0,1; 0,11; 0,111; 0,1111... _____

d. $\frac{2n}{n+1}$ _____

3. Determinen, si existe, el límite de cada una de las siguientes sucesiones a partir de su gráfica. En caso de que exista el límite, propongan una sucesión cuyo límite sea el indicado.

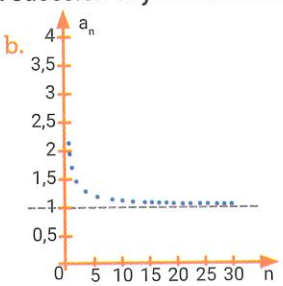
a.



Límite: _____

Sucesión propuesta: _____

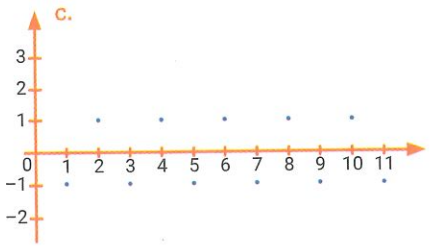
b.



Límite: _____

Sucesión propuesta: _____

c.



Límite: _____

Sucesión propuesta: _____

4. Resuelvan la siguiente situación y completen la tabla.

En un laboratorio se utilizan soluciones de sal en agua; dependiendo de su uso, será la concentración necesaria. Si se cuenta con 1 kg de sal, se irá agregando agua para obtener las diferentes soluciones. Completen la tabla de las diferentes soluciones acuosas de sal, según los litros de agua que se agreguen.

Litros de agua	1	10	20	50	100	200
Concentración de sal en agua (kg/litro)						

a. ¿Qué sucede con la concentración de sal en agua a medida que la cantidad de litros de agua agregada aumenta?

_____

b. Para alguna cantidad de agua agregada, ¿la concentración de la solución es cero?

_____

c. Realicen un gráfico de la situación de la concentración de la solución en función de la cantidad de litros agregados a la sal.

24. Límite de una función

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **"acercarse" a un número real** es posible hacerlo con **valores próximos, pero mayores**, es decir, **por derecha** o bien, con **valores menores**, esto es **por izquierda.**

Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ *con dominio* $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$*, es posible cuestionarse qué sucederá con los valores de la función cuando x tome valores cercanos a* $x = 2$.

Se realiza una tabla para determinar qué sucede analíticamente:

x se "acerca" a 2 por izquierda → ← *x se "acerca" a 2 por derecha*

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	3,0	3,99	3,999	3,9999	∄	4,0001	4,001	4,01	4,1

f(x) se "acerca" a 4 por izquierda (con valores menores) → ← *f(x) se "acerca" a 4 por derecha (con valores mayores)*

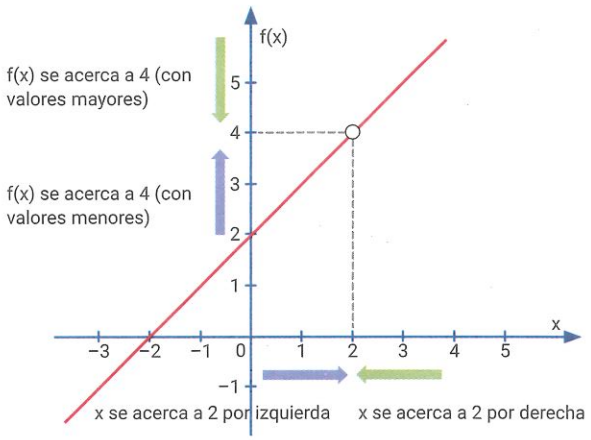
Para graficar la función, se factoriza la expresión y se la simplifica:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \Rightarrow f(x) = x + 2 \text{ con } D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

En el gráfico es posible observar el comportamiento de la función cuando x tiende al valor 2, ***matemáticamente:***

"el límite de la función f(x) cuando x tiende a 2 es 4"

En símbolos: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$



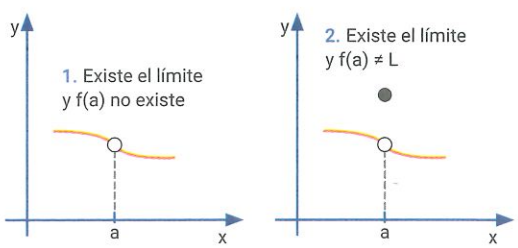
En general, cuando una función definida en un dominio que incluya o no al valor x = a, es posible decir que el límite de f(x) cuando x tiende al valor a es $L \in \mathbb{R}$, siempre que |f(x) − L| toma valores tan pequeños como se quiera, mientras que |x − a| también lo hace.

En símbolos:

$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow |f(x) - L|$ es lo suficientemente pequeño cuando |x − a| también es pequeño, es decir, "x tiende al valor a".

Es importante notar que la existencia del límite de la función cuando "x tiende al valor a" **no** depende de la existencia de la función en ese valor, es decir, la función debe estar definida en un entorno de x = a, pero podría suceder que:

1. f(a) no exista
2. $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$



Una condición importante para que el límite cuando "x tienda al valor a" exista, es que "lateralmente" la función tienda al mismo valor. Estos límites reciben el nombre de "límites laterales". Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x \to a^-} f(x)}_{\text{Límite por izquierda}} = \underbrace{\lim_{x \to a^+} f(x) = L}_{\text{Límite por derecha}}$$

ACTIVIDADES

24. Límite de una función

Test de comprensión

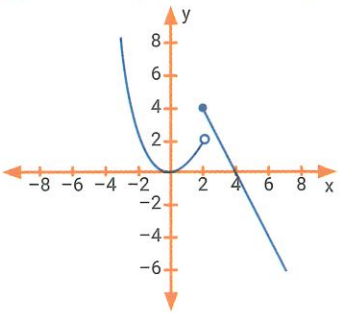
5. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es posible calcular el límite de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ cuando x tiende a -1? ¿Cuál es el valor?

b. ¿Cuál es el límite de $f(x) = x^3 - 1$ cuando x tiende a 2?

c. ¿Es correcto afirmar que si $f(a) = L$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$?

6. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.



a. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$ ☐

b. $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ No existe porque no existe f(2) ☐

c. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$ ☐

d. $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ ☐

e. $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$ ☐

7. Grafiquen la función en sus carpetas y completen lo pedido en cada caso.

a. $f(x) = \begin{cases} -x + 4 \text{ si } x < 2 \\ x - 2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$

$f(2) =$ ☐ $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ ☐ $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ ☐ $\lim_{x \to 2} f(x) =$ ☐

b. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ si } x < 1 \\ -x + 3 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

$f(1) =$ ☐ $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ ☐ $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ ☐ $\lim_{x \to 1} f(x) =$ ☐

8. Indiquen, cuando sea posible, el valor de cada uno de los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to 2} x^2 - 5 =$ _____

b. $\lim_{x \to 0} \text{tg}(x) =$ _____

c. $\lim_{x \to \pi} \cos(x - \pi) =$ _____

d. $\lim_{x \to 1} \cos(1 - x) =$ _____

9. Tengan en cuenta la siguiente función e indiquen el valor de b para que exista el $\lim_{x \to 3} f(x)$.

$f(x) = \begin{cases} x + b \text{ si } x < 3 \\ x^2 - 4 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$

25. Propiedades de los límites

▶ SABERES DINÁMICOS

Existencia del límite

Si el límite de una función f(x) cuando "x tiende al valor a" existe y es finito, este valor finito debe ser único. Es decir:

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \text{ y } \lim_{x\to a} f(x) = L_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow L_1 = L_2$$

Propiedades de los límites finitos

Sean las funciones f(x) y g(x), tales que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, y sea $k \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades	Ejemplo
$\lim_{x\to a} k = k$	$\lim_{x\to 2} 4 = 4$
$\lim_{x\to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to 3} [4 \cdot x^2] = 4 \cdot \lim_{x\to 3} x^2 = 4 \cdot 9 = 36$
$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$	$\lim_{x\to 1} (x^2 + \log x) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} \log x = 1 + 0 = 1$
$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$	$\lim_{x\to 0} [\text{sen}(x) - 3^x] = \lim_{x\to 0} \text{sen}(x) - \lim_{x\to 0} 3^x = 0 - 1 = -1$
$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$	$\lim_{x\to 4} [e^{4-x} \cdot \sqrt{x}] = \lim_{x\to 4} e^{4-x} \cdot \lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 1 \cdot 2 = 2$
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ con $L_2 \neq 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{2^x}{x-3} = \frac{\lim_{x\to 0} 2^x}{\lim_{x\to 0} (x-3)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$
$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = (L)^n$ con $L > 0$ y $n \in \mathbb{R}$	$\lim_{x\to 1} (-2x)^3 = (-2)^3 = -8$
$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\lim_{x\to a} g(x)} = (L_1)^{L_2}$ con $L_1 > 0$ y $L_2 \in \mathbb{R}$	$\lim_{x\to -1} (3-x)^x = \left[\lim_{x\to -1} (3-x)\right]^{\lim_{x\to -1} x} = (4)^{-1} = \frac{1}{4}$

Dinámica TConecta

Ingresen a puerto.pub/proplim * para mirar un video acerca de las propiedades de los límites finitos.

* Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=_DlNeRoIDpE

ACTIVIDADES

25. Propiedades de los límites

Test de comprensión

10. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Si el límite de una función en un punto existe, ¿puede tomar más de un valor? ¿por qué?

b. ¿Es correcto que $\lim_{x \to a} [k \,.\, f(x)] = k \,.\, \lim_{x \to a} f(x)$ siendo k una constante?

c. Si $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$ y $\lim_{x \to 1} g(x) = -2$, ¿el valor del $\lim_{x \to 1} [2 \,.\, f(x) - g(x)] = 6$?

11. Resuelvan los siguientes límites aplicando propiedades.

a. $\lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 1) =$

b. $\lim_{x \to 10} (x \,.\, \log x^2) =$

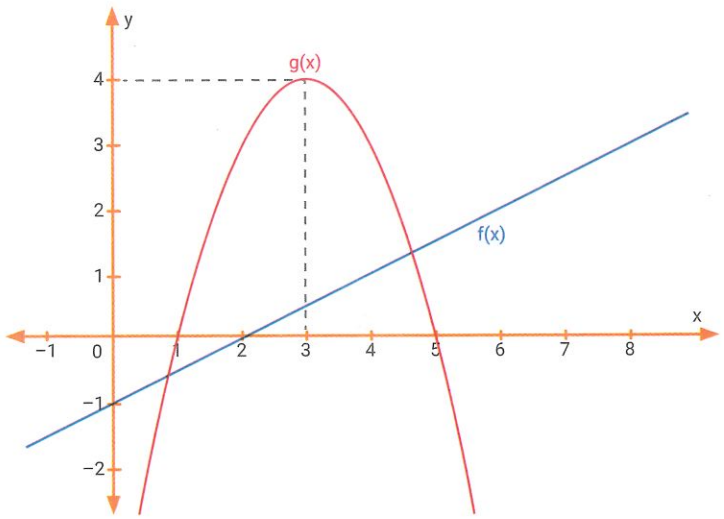
c. $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2}{1 + \sqrt{x}} =$

d. $\lim_{x \to 2} (2x - 1)^{3 - x} =$

e. $\lim_{x \to \pi} \left[\cos (x - \pi) \,.\, \text{sen} \left(-\frac{x}{2}\right)\right] =$

f. $\lim_{x \to 0} \frac{(3 - x)^{4x}}{x^2 - 2} =$

12. Observen el gráfico y calculen los límites indicados en cada caso aplicando propiedades.



a. $\lim_{x \to 4} \left[2f(x) - \frac{1}{3} g(x)\right] =$

b. $\lim_{x \to 4} [g(x)]^{2f(x)} =$

c. $\lim_{x \to 4} \frac{3g(x) - f(x)}{[g(x)]^{-1}} =$

d. $\lim_{x \to 4} \sqrt{g(x) - 2f(x)} =$

26. Límites infinitos

▶ SABERES DINÁMICOS

Algunas funciones toman valores cada vez mayores o menores conforme x tienda a un valor determinado.

Por ejemplo, se analiza el comportamiento de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ *con* $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ *cuando x tiende a 1.*

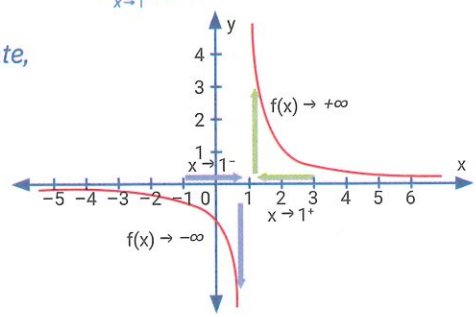
x tiende a 1 por izquierda → | ← *x tiende a 1 por derecha*

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)	−10	−100	−1 000	−10 000	∄	10 000	1 000	100	10

f(x) toma valores cada vez menores ↓ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

f(x) toma valores cada vez mayores ↓ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Gráficamente,



Utilizando el límite como una herramienta, también es posible analizar el comportamiento de la función cuando x toma valores muy grandes en valor absoluto.

Para la función anterior sería:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x-1)_{\to +\infty}} = 0$ *Cuando x toma valores cada vez mayores, el denominador de la expresión toma valores cada vez mayores y el cociente toma valores cada vez más próximos a 0.*

x	10	100	1 000	10 000	100 000
f(x)	$0,\overline{1}$	$0,\overline{01}$	$0,\overline{001}$	$0,\overline{0001}$	$0,\overline{00001}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(x-1)_{\to -\infty}} = 0$ *Cuando x toma valores cada vez menores, el denominador de la expresión toma valores cada vez mayores (en valor absoluto) y el cociente toma valores cada vez más próximos a 0.*

x	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000
f(x)	$-0,\overline{09}$	$-0,\overline{009}$	$-0,\overline{0009}$	$-0,\overline{00009}$	$-0,\overline{000009}$

En general, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$

Propiedades de los límites infinitos

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $0 \cdot \lim_{x \to a} f(x) = 0$
2. $[\lim_{x \to a} f(x)]^n = +\infty$ siempre que $n > 0$
3. $k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si $k > 0$
4. $k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si $k < 0$

ACTIVIDADES

26. Límites infinitos

Test de comprensión

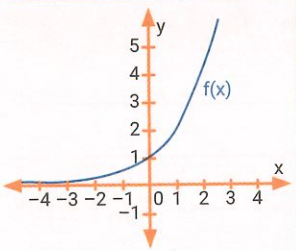
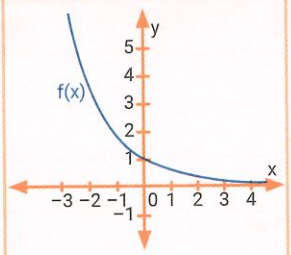
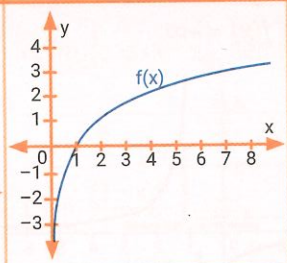
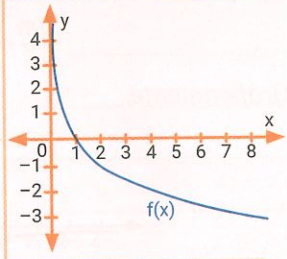
13. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Cuál es el límite de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, cuando x tiende a cero?

b. ¿Cuál es el límite de la función $f(x) = e^x$, cuando x tiende a $+\infty$?, ¿y cuando x tiende a $-\infty$?

c. ¿Cuál es el límite de la función $f(x) = \ln x$, cuando x tiende a 0 por derecha? ¿y cuando x tiende a $+\infty$?

14. **Reúnanse en grupos y completen los cuadros a partir del gráfico de cada una de las siguientes funciones; luego, escriban la regla general.**

$f(x) = 2^x$	$f(x) = 0{,}5^x$	$f(x) = \log_2 x$	$f(x) = \log_{0{,}5} x$
			
$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

En general,

sea $f(x) = a^x$ { Si $a > 1 \Rightarrow$ { $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ } ; Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ { $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ } }

En general,

sea $f(x) = \log_a x$ { Si $a > 1 \Rightarrow$ { $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ } ; Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ { $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ } }

15. **Calculen los siguientes límites.**

a. $\lim_{x \to 1} \frac{-1}{x - 1} =$ _____

b. $\lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{2x - 4} =$ _____

c. $\lim_{x \to 1^-} \ln (1 - x) =$ _____

d. $\lim_{x \to -\infty} (e^x + 1) =$ _____

e. $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 1}{-x} =$ _____

f. $\lim_{x \to +\infty} 3^{-x} =$ _____

DinámicaMente

Lean atentamente y resuelvan.

En un experimento biológico, la población de una colonia de bacterias (en millones) después de t días viene dada por: $P(t) = \frac{4}{2 + 8e^{-2t}}$

a. ¿Cuál es la población inicial de la colonia de bacterias?

b. ¿Cuál es el comportamiento de la población conforme los días que transcurren? ¿Crece indefinidamente el número de bacterias, o tiende a un cierto valor? Analicen con sus compañeros cómo es posible determinarlo.

15. Completen la tabla con el límite pedido según cada sucesión.

Término general a_n	$\lim_{x \to -\infty} a_n$
$\frac{1}{3n}$	
$\frac{1}{n^2} + 2$	
$\frac{2}{3^n}$	
$n_2 + 1$	
$-1 + \frac{1}{n}$	

16. Tengan en cuenta la función y completen lo pedido. Luego, realicen su gráfico.

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \leq -1 \\ x + 3 \; x > -1 \end{cases}$$

a. $f(-1) =$

b. $\lim_{x \to -1^-} f(x) =$

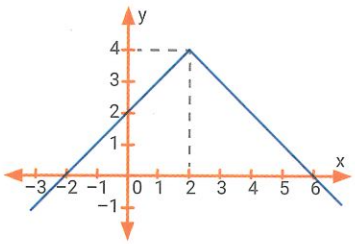
c. $\lim_{x \to -1^+} f(x) =$

d. $\lim_{x \to -1} f(x) =$

17. Completen lo pedido a partir del gráfico de cada una de las siguientes funciones.

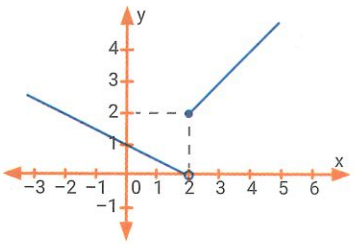
a.

- $f(2) =$
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$
- $\lim_{x \to 2} f(x) =$



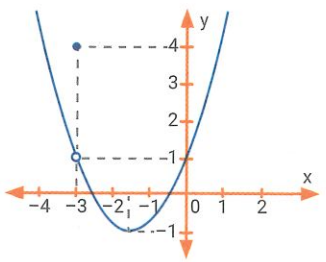
b.

- $f(2) =$
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$
- $\lim_{x \to 2} f(x) =$



c.

- $f(-3) =$
- $\lim_{x \to -3^-} f(x) =$
- $\lim_{x \to -3^+} f(x) =$
- $\lim_{x \to -3} f(x) =$



18. Unan con flechas cada uno de los límites con su valor correspondiente.

a. $\lim_{x \to 1} (3x + 2) =$

b. $\lim_{x \to -2} \sqrt{7 - x} =$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(\pi x)}{\cos(\pi - x)} =$

d. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1)^{\ln(4 - x)} =$

- 1
- 0
- 3
- 5

19. Resuelvan los siguientes límites aplicando propiedades, cuando sea posible.

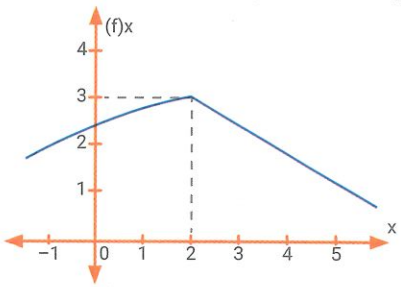
a. $\lim_{x \to -1} (3^{-x} . x^2) =$

b. $\lim_{x \to 2\pi} \frac{\cos(x)}{1 - \text{sen}(x)} =$

c. $\lim_{x \to 4} [\log_2(2x) + \sqrt{x^2 + 9}] =$

d. $\lim_{x \to 0} (2 - x)^{e^x} =$

20. Tengan en cuenta el gráfico y calculen lo pedido.



a. $\lim_{x \to 2} [2f(x) + 3]^{\frac{1}{x}} =$

b. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{1}{3} . f(x)} =$

c. $\lim_{x \to 2} \frac{x . f(x)}{x - 1} =$

d. $\lim_{x \to 2} (2x - 1)^{f(x)} =$

21. Completen las tablas con el valor de cada límite, cuando sea posible.

a.

$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$	
$\lim_{x \to 4}$	
$\lim_{x \to 2^+}$	
$\lim_{x \to 0}$	
$\lim_{x \to +\infty}$	
$\lim_{x \to 6}$	

b.

$f(x) = e^{1 - x}$	
$\lim_{x \to 1}$	
$\lim_{x \to 0}$	
$\lim_{x \to +\infty}$	
$\lim_{x \to -\infty}$	
$\lim_{x \to -1}$	

22. Hallen el valor de $\lim_{x\to 2} f(x)$ en cada caso.

a. $\lim_{x\to 2} [f(x) + x^2] = 9$

b. $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$

23. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda, sabiendo que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.

a. $\lim_{x\to a} [2 - f(x)]^3 = -\infty$ ☐

b. $\lim_{x\to a} -g(x) = -\infty$ ☐

c. $\lim_{x\to a} [f(x)]^2 = +\infty$ ☐

d. $\lim_{x\to a} [g(x) - f(x)] = +\infty$ ☐

24. Encuentren el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que los límites, cuando x tienda al valor indicado de la función partida f(x), existan.

a. $\lim_{x\to 1^-} (mx + 3) = \lim_{x\to 1^+} (2x - 5)$

b. $\lim_{x\to 2^-} (x^2 - m) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x + 2}{1 - x}$

c. $\lim_{x\to 1^-} 2^{mx} = \lim_{x\to 1^+} \log_2 (5 - x)$

25. Calculen los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to 3} \frac{x + 1}{x - 3} =$

b. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} =$

c. $\lim_{x\to 2^-} \ln (2 - x) =$

d. $\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1 - x} =$

e. $\lim_{x\to -\infty} (1 - 2e^x) =$

f. $\lim_{x\to 0} \frac{2x + 3}{x} =$

g. $\lim_{x\to -\infty} \log (3 - 2x) =$

26. Escriban siempre, a veces o nunca, según corresponda. Ejemplifiquen en cada caso.

a. Si existe f(a), entonces existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

b. Si los límites laterales de f(x), cuando $x \to a$, tienen el mismo valor, entonces existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

c. Aunque no exista f(a), puede existir el $\lim_{x\to a} f(x)$.

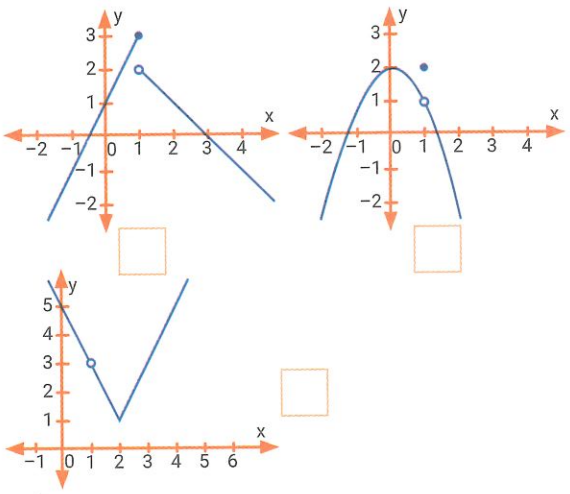
d. A pesar de que los límites laterales de f(x), cuando $x \to a$, no coincidan en valor, el $\lim_{x\to a} f(x)$ puede existir.

27. Escriban la letra correspondiente en cada gráfico, según las condiciones pedidas.

a. f(1) no existe $\wedge$ $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

b. $f(1) = 3 \wedge \lim_{x\to 1} f(x)$ no existe

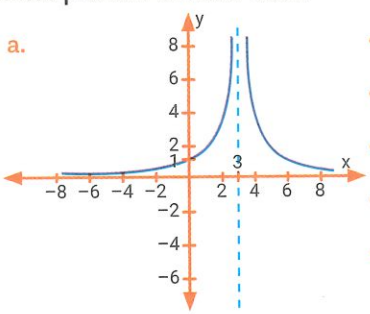
c. $f(1) = 2 \wedge \lim_{x\to 1} f(x) = 1$



☐ ☐ ☐

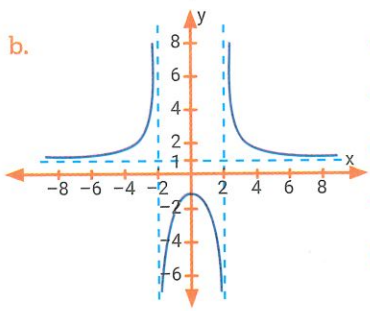
28. Observen los gráficos y completen con los límites pedidos en cada caso.

a.



- $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x\to 3^-} f(x) =$
- $\lim_{x\to 3^+} f(x) =$
- $\lim_{x\to 0} f(x) =$

b.



- $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$
- $\lim_{x\to 0} f(x) =$

29. Tengan en cuenta la función y determinen los valores de $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ para que existan los límites $\lim_{x\to -1} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} -bx & \text{si } x \le -1 \\ x^2 + ax & \text{si } -1 < x \le 2 \\ -bx + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

27. Indeterminaciones del tipo 0/0

▶ SABERES DINÁMICOS

En matemática algunas **operaciones no están definidas**, como **el cociente de una expresión con denominador nulo, la radicación de índice par de radicando negativo** y **la logaritmación de argumento negativo o cero**; por ese motivo se las denomina indefiniciones.
Durante el cálculo de límites suelen aparecer este tipo de expresiones, pero también otras denominadas **indeterminaciones**. Las indeterminaciones son siete y sus expresiones son: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 . \infty$; 1^{∞}; 0^{0}; ∞^{0}.

En una indeterminación algebraica no es posible determinar el resultado, aunque es posible resolverlas utilizando algunas herramientas algebraicas durante el cálculo del límite.

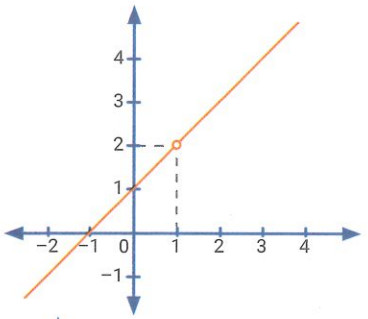
Para recordar pág. 109

Indeterminación del tipo 0/0

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

a. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 1} x^2-1}{\lim_{x\to 1} x-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Para poder resolver, se debe factorizar el numerador.

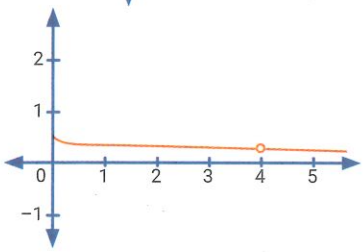
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = \mathbf{2}$$



b. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Para poder resolver, se racionaliza el numerador.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$



El resultado de algunas indeterminaciones puede utilizarse para resolver otras, a partir de $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ realizando una tabla de valores para explorar qué sucede en un entorno de x = 0.

x	$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$
−0,1	0,9983341665
−0,01	0,9999833334
−0,001	0,9999998333

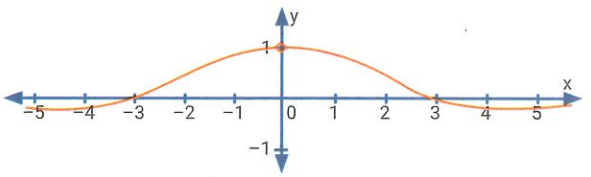
Valores menores que x = 0

x	$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$
0,1	0,9983341665
0,01	0,9999833334
0,001	0,9999998333

Valores mayores que x = 0

Se puede concluir que: $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

También es válido el resultado si: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen } x} = 1$



Utilizando este resultado, es posible calcular otras indeterminaciones similares.

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 . sen\,(2x)}{2 . x} = \lim_{x\to 0} 2 . \lim_{x\to 0} \frac{sen\,(2x)}{2 . x} = 2 . 1 = 2$$

ACTIVIDADES

27. Indeterminaciones del tipo 0/0

Test de comprensión

30. Respondan y expliquen las respuestas.

a. El límite $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$, ¿presenta indeterminación del tipo 0/0?

b. A partir del resultado $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, ¿es posible resolver el $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } (x)}{x}$?

c. Si $\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$, siendo $P(x) \wedge Q(x)$ dos polinomios, ¿$x = a$ es una raíz común a ambos polinomios? Enuncien una estrategia para poder salvar este tipo de indeterminaciones.

31. Indiquen con una X cuáles de los siguientes límites presentan indeterminaciones del tipo 0/0.

a. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{2x + 4} =$ ☐

b. $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{3x} + 9} =$ ☐

c. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x} =$ ☐

d. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} =$ ☐

32. Calculen. Luego, comparen con un compañero y acuerden cuál es el límite correcto en cada caso.

a. $\lim_{x \to -2} \frac{x - 2}{x^2 + 2x - 8} =$ _____

b. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 2x - 3} =$ _____

c. $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8} =$ _____

d. $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{2x - 10} =$ _____

e. $\lim_{x \to -2} \frac{(2 + x)^2}{x^2 + 4x + 4} =$ _____

f. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} =$ _____

33. Resuelvan los siguientes límites, teniendo en cuenta que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } (2x)}{3x} =$ _____

b. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x + 4x \,.\, \cos x}{2x} =$ _____

c. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } (6x)}{\text{sen } (3x)} =$ _____

d. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos (3x) \,.\, \text{sen } (5x)}{\text{sen } x} =$ _____

28. Indeterminaciones del tipo ∞/∞

▶ SABERES DINÁMICOS

Este tipo de indeterminaciones surge en el cálculo de límites de algunas funciones racionales.

$$\text{Si } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Si las funciones f(x) y g(x) son polinomios, para "salvar" este tipo de indeterminación la estrategia consiste en sacar factor común x^n tanto en el polinomio del numerador como en el del denominador, siendo n el mayor de los grados entre ambos polinomios. De esa manera se simplifica la expresión lo máximo que se pueda y se aplican las propiedades del límite.

1. El grado del polinomio del numerador es igual que el grado del polinomio del denominador.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + x - 1}{2x^3 + x^2 - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(4 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}} = \frac{4}{2} = 2$$

2. El grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5 - x^3 + 2}{x^4 + x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}} = \infty$$

3. El grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

En forma general:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \text{Si el grado } P(x) = \text{grado } Q(x) \Rightarrow L = \dfrac{\text{coef. ppal de } P(x)}{\text{coef. ppal de } Q(x)} \\ \text{Si el grado } P(x) > \text{grado } Q(x) \Rightarrow \infty \\ \text{Si el grado } P(x) < \text{grado } Q(x) \Rightarrow 0 \end{cases}$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/inf * para mirar un video explicativo acerca de las indeterminaciones del tipo ∞/∞.

*Enlace acortado de https://youtu.be/RERF3EXziSE

ACTIVIDADES

28. Indeterminaciones del tipo ∞/∞

Test de comprensión

34. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Dados los polinomios $P(x) = (x^2 + 1).(x - 1)^2.(2x^3 + 1)$ y $Q(x) = x^5.(3x^2 + 1)$, ¿cuánto vale el $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$? ¿Y el $\lim_{x\to\infty} \frac{Q(x)}{P(x)}$?

b. Dados los polinomios $P(x) = (x^4 + 1).(x + 2)^2$ y $Q(x) = x^3.(5 + 2x)$, ¿cuánto vale el $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$? ¿Y el $\lim_{x\to\infty} \frac{Q(x)}{P(x)}$?

c. Si el grado de P(x) es 3 y el grado de Q(x) es n, ¿cuáles son los valores de n, tales que el resultado del $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ sea un número diferente de cero, cero o tienda a infinito?

35. Resuelvan los límites. Luego, comparen con un compañero y acuerden cuál es el límite correcto en cada caso. Tengan en cuenta los grados del numerador y del denominador.

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{7}{2x^4} =$ _____

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+1} =$ _____

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 + 2x}{2x^3 - 1} =$ _____

d. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 3x + 2x^2}{4x^5 + x^3} =$ _____

e. $\lim_{x\to\infty} \frac{5 - x + x^6}{2x^3 + x^4} =$ _____

f. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 4x^3}{2x^2 + x^3 - x} =$ _____

g. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x - x^2}{5x^6 + x^2 - x} =$ _____

h. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x^3 + 1)x^2}{2x(x-2)^4} =$ _____

36. Determinen los valores de a en cada caso para que se verifiquen las igualdades.

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^3 - 2x + 1}{x + 2x^3} = 6$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x + a^3x^4 + 4x^2}{ax^4 - 4} = 9$

DinámicaMente

Lean atentamente y resuelvan.

a. Encuentren, si existe, un polinomio P(x) tal que $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 - 2x + 1}{P(x)} = 6$.

b. El polinomio P(x) ¿es único?

29. Continuidad de una función en un punto. Discontinuidades

▶ SABERES DINÁMICOS

Una función **f(x) es continua en x = a** si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La función está definida en **x = a**, es decir: $\exists\, f(a) \Rightarrow x = a \in D_f(x)$.
2. Existe el límite de la función cuando x tiende al valor a, es decir: $\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$
3. El valor que toma la función en x = a debe coincidir con el valor del límite de la función cuando **x → a**, es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

- Una **función** es **continua en un intervalo** incluido en el dominio de la función, si es **continua en todo x perteneciente a dicho intervalo.**
- Si **al menos una de las tres condiciones de continuidad en x = a no se cumple**, la **función NO es continua en x = a**, es decir, la función presenta una discontinuidad en x = a.
- **Gráficamente**, una discontinuidad es una **interrupción en el gráfico de la función.**

TIP

$\exists$ significa existe.

$\nexists$ significa no existe.

Clasificación de discontinuidades

DISCONTINUIDAD

EVITABLE

Existe el límite, pudiendo estar o no definida en el punto, o bien que, a pesar de estar definida no coincida con el valor del límite. Se puede redefinir la función para que sea continua, asignándole el valor del límite a la función en ese punto.

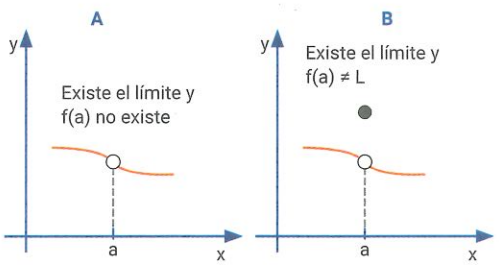
ESENCIAL

No existe el límite de la función en el punto. Es posible que en el punto los límites laterales de la función no coincidan, o bien, el límite no tome un valor finito.

Discontinuidad evitable

La función f(x) presenta una **discontinuidad evitable en x = a** si existe el $\lim_{x\to a} f(x)$, pero o **no coincide con el valor de f(a),** o **simplemente no existe f(a)**. En símbolos:

- $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ pero $\nexists$ f(a) **(gráfico A) o bien,**
- $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ **(gráfico B)**

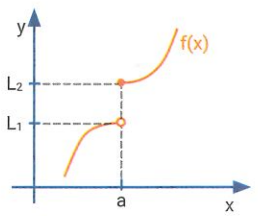


Discontinuidad esencial

La función **f(x) presenta una discontinuidad esencial en x = a**, cuando $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$. Dentro de las posibilidades puede darse que:

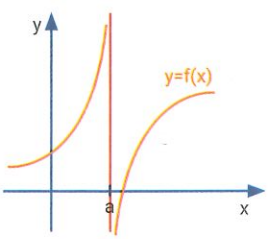
- Exista el límite por la derecha y por la izquierda cuando x → a, pero no coinciden; se la llama **de salto finito**, es decir:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2 \text{ pero } L_1 \neq L_2$$



- Alguno de los límites laterales (o ambos) es infinito; se la denomina **de salto infinito**, es decir:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \text{ o } \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \text{ (o ambos)}$$



ACTIVIDADES

29. Continuidad de una función en un punto. Discontinuidades

Test de comprensión

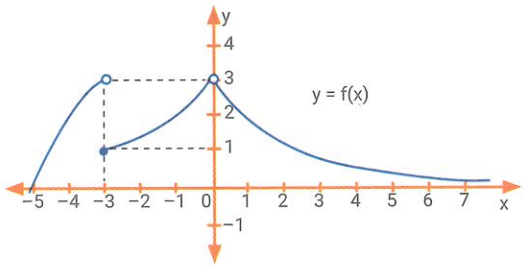
37. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ en $x = 1$? ¿Puede redefinirse?

b. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ en $x = 1$? ¿Puede redefinirse?

c. ¿Es correcto afirmar que toda función definida por tramos es discontinua en el valor de la partición?

38. Observen el gráfico de la función f(x) y clasifiquen las discontinuidades que presenta en $x = -3$ y en $x = 0$. Expliquen su respuesta.



Discontinuidad en $x = -3$

Discontinuidad en $x = 0$

39. Grafiquen cada una de las siguientes funciones y clasifiquen las discontinuidades en los puntos indicados en cada caso.

a. $f(x) = \frac{x}{x-2}$ en $x = 2$

b. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ en $x = -1$ y en $x = 1$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \leq 1 \\ 2x + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

d. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x \leq 0 \\ x + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

DinámicaMente

Expresen la función $f(x) = \frac{\text{sen } x}{|x|}$ como una función definida por tramos, analicen la continuidad en $x = 0$ y realicen el gráfico en sus carpetas.

30. Asíntotas

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **asíntota de la función f(x)** es una recta tal que la distancia entre el gráfico de la función y la recta tiende a ser cero cuando x tiende a un valor determinado o a infinito. Por ser una recta, una función puede presentar tres tipos de asíntotas.

ASÍNTOTA

VERTICAL

La recta $x = a$ es asíntota vertical de f(x), si se cumple:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

HORIZONTAL

La recta $y = b$ es asíntota horizontal de f(x), si se cumple:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

OBLICUA

La recta $y = mx + b$ es asíntota oblicua de f(x), si se cumple que no tiene asíntota horizontal y el grado del polinomio del numerador supera en uno al del denominador. Los valores de m y b se calculan a partir de:

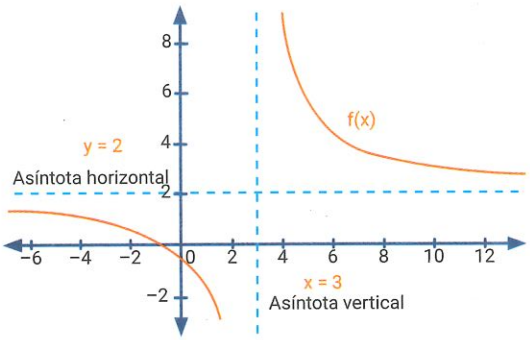
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

Ejemplos:

• *La función* $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$ *presenta dos asíntotas, una vertical y otra horizontal:*

$\lim_{x \to 3} \frac{2x + 1}{x - 3} = \infty \Rightarrow$ ***x = 3 es asíntota vertical.***

$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{x - 3} = 2 \Rightarrow$ ***y = 2 es asíntota horizontal.***



• *La función* $g(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ *presenta dos asíntotas, una vertical, pero no horizontal:*

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x - 1} = \infty \Rightarrow$ ***x = 1 es asíntota vertical.***

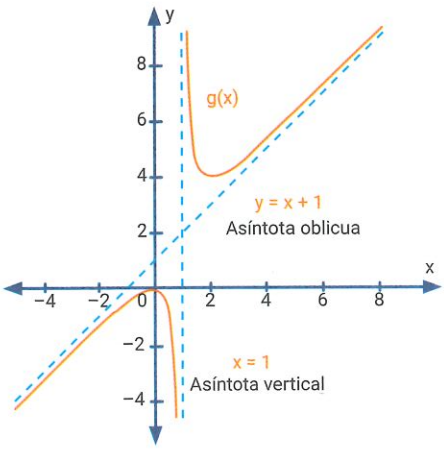
$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x - 1} = \infty \Rightarrow$ ***g(x) no posee asíntota horizontal.***

Como el grado del polinomio del numerador supera en uno al grado del denominador, se calcula la asíntota oblicua:

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x - 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \Rightarrow$ ***m = 1***

$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - 1 . x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x - 1} = 1$

$\Rightarrow$ ***b = 1***



Entonces la recta ***y = x + 1 es asíntota oblicua.***

ACTIVIDADES

30. Asíntotas

Test de comprensión

40. Respondan y expliquen las respuestas.

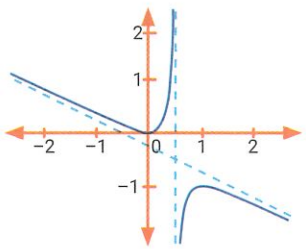
a. ¿Puede existir una función racional que no posea asíntota vertical? Ejemplifiquen.

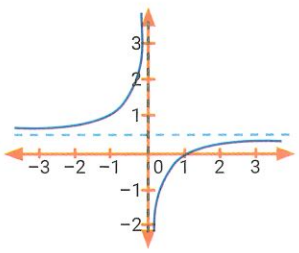
b. Una función racional con grado del numerador menor al del denominador, ¿puede no tener ninguna asíntota?

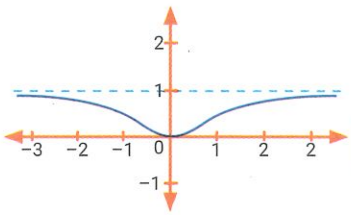
c. Si una función racional tiene asíntota oblicua, ¿puede además tener asíntota horizontal?

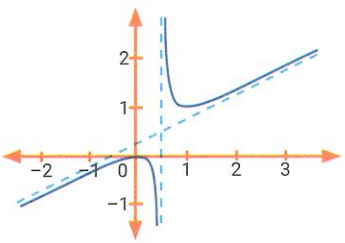
41. Escriban la letra del ítem de la función que corresponde a cada gráfico.

a. $f(x) = \frac{x - 1}{2x}$ **b.** $f(x) = \frac{x^2}{1 - 2x}$ **c.** $f(x) = \frac{2x^2}{4x - 2}$ **d.** $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$









42. Completen el cuadro con lo pedido.

Función	Asíntota vertical	Asíntota horizontal	Asíntota oblicua
$f(x) = \frac{4 - 2x}{x + 1}$			
$f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1}$			
$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$			
$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 4}$			

Integración final

5

43. Calculen los siguientes límites con indeterminación del tipo 0/0.

a. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} =$

b. $\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 + x - 2} =$

c. $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} =$ con $a > 0$

d. $\lim_{x\to 7} \frac{x - 7}{\sqrt{x - 4} - \sqrt{3}} =$

e. $\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x - 3}}{x^2 - 9} =$

f. $\lim_{x\to 0} \frac{x^5 + x^3}{x^6} =$

g. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} =$

h. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} =$

44. Calculen los siguientes límites con indeterminación del tipo ∞/∞.

a. $\lim_{x\to \infty} \frac{(x^2 - x)(x + 1)}{x(2x^2 + x + 3)} =$

b. $\lim_{x\to \infty} \frac{(3x - 1)(2x^2 + 1)}{x^2 + 2} =$

c. $\lim_{x\to \infty} \frac{2(x^3 - 1)(x^2 + 4)}{3x^5 + 2x^2 - 1} =$

d. $\lim_{x\to \infty} \frac{(2x + 1)^3}{4x(x^2 + 5)} =$

e. $\lim_{x\to \infty} \frac{(4x - 1)^2(x^2 - x)}{5x^2 + x^5 - 1} =$

f. $\lim_{x\to \infty} \frac{4(x - x^5)}{2x^4(x + x^2)} =$

g. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x(x + 1)^2(x^3 - 1)}{x^2(x^2 + 2)} =$

45. Calculen los siguientes límites utilizando como dato que $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(2x) \cdot \text{sen}(x)}{4x} =$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) \cdot \text{sen}(x)}{2x} =$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(3x) \cdot \text{sen}(2x)}{6x^2} =$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \cos(2x) + \text{sen}(2x^1)}{4x} =$

46. Calculen los siguientes límites e indiquen el tipo de indeterminación, si existe, que presenta cada uno.

a. $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{10}}{\sqrt{x} - 3} =$

b. $\lim_{x\to \infty} \frac{x(2 - 3x)^2}{2x^3 + x} =$

c. $\lim_{x\to 2^-} \frac{2x - 4}{\sqrt{2 - x}} =$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(2x)}{\text{sen}(4x)} =$

e. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{2x}\right) =$

f. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + x} =$

g. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2(x^3 - 1)}{x^2(x^2 + 1)} =$

h. $\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \text{sen}(4x)}{x^3 + 3x^2} =$

i. $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^3(5x - 1)}{7x(x^2 + 1)^2} =$

47. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Indiquen el valor de cada límite en los casos falsos.

a. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3(x - 1)}{x^2 + 2x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \text{sen}\, x}{x^4 - x^2}$ ☐

b. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^3(2x - 5)}{(5x^2 + 1)(x - 1)^2}$ ☐

c. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(3x) + x \cdot \cos(x)}{2x} = \lim_{x\to \infty} \frac{2(x^2 - 1)(x + 1)}{(x^2 + 1)(x + 3)^2}$ ☐

48. Determinen el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que se verifiquen los resultados en cada caso.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(ax)}{3x} = 3$

b. $\lim_{x\to \infty} \frac{ax^2(x^3 + 1)}{3x^2 - x + 2x^5} = 5$

c. $\lim_{x\to a} \frac{2x^2 + 4x - 6}{x^2 - 4x + 3} = -4$

d. $\lim_{x\to 1} \frac{(x - a)(x - 1)}{x^2 - 1} = 5$

49. Clasifiquen, si existen, los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones. En caso de que la discontinuidad sea evitable, redefinan la función para que sea continua; luego, grafíquenlas.

a. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

c. $f(x) = \dfrac{3 - x}{x^2 - 9}$

d. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 2 \\ |x - 4| & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f. $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si } x < 0 \\ |x| + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

g. $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 4 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

50. Determinen el valor de $a \in \mathbb{R}$, en cada caso, para que la función f(x) sea continua en todo su dominio.

a. $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3a + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

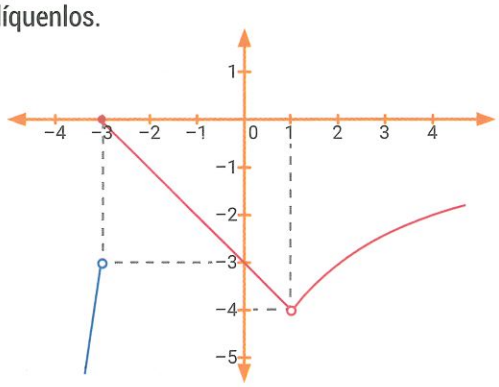
b. $f(x) = \begin{cases} 2^x + a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 3a + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

51. Determinen el valor de $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, en cada caso, para que la función f(x) sea continua en todo su dominio.

a. $f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 + bx + a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x - a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2^x + \log_2 x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

52. Analicen la continuidad de la siguiente función. En caso de que existan puntos de discontinuidad, indíquenlos.



53. Hallen las asíntotas de las siguientes funciones y luego grafíquenlas.

a. $f(x) = \dfrac{x}{2x + 4}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{3 - x}$

c. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$

d. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x - 2}$

e. $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 1}{x - 1}$

54. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. Si el $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, entonces f(x) es continua en x = 4. ☐

b. Si f(x) es continua en x = 3 y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$, entonces $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$. ☐

c. La función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 5}$ presenta una discontinuidad de salto en x = −5. ☐

d. Si $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, entonces se puede asegurar que la función f(x) es continua en x = 3. ☐

e. La función $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$ presenta una discontinuidad de salto infinito en x = 1. ☐

f. Si $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$ y f(3) = 2, entonces se puede afirmar que la función f(x) es continua en x = 3. ☐

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Sucesión

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números, uno a continuación del otro. Se denomina término a cada uno de los elementos de una sucesión. El **término general a_n** (término enésimo) es la expresión de un término cualquiera de la sucesión en función del lugar que ocupa.
La sucesión $a_n = n + 1$ está formada por los siguientes elementos 2; 3; 4; ...; n + 1.

Factorización de un polinomio

Factorizar un polinomio implica encontrar todas sus raíces reales, para ello se utilizan los casos de factoreo y el teorema de Gauss.

• **Factor común:** se denomina factor común de todos los términos de un polinomio a la expresión común en todos ellos.

$$2x^4 + 4x^2 - 6x = 2x \cdot (x^3 + 2x - 3)$$

• **Diferencia de cuadrados:** es la diferencia de un binomio de dos cuadrados perfectos.

$$x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$$

• **Teorema de Gauss:** permite conocer las posibles raíces racionales de un polinomio de coeficientes enteros y término independiente no nulo. Las posibles raíces serán de la forma $\frac{p}{q}$. siendo "p" un divisor del término independinete y "q" un divisor del coeficinete principal.
Si el polinomio es cuadrático, es posible hallar sus raíces aplicando la **fórmula resolvente para ecuaciones cuadráticas**.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Función valor absoluto

El valor absoluto de un número real x se define como:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cuando una función presenta en su definición alguna expresión con valor absoluto, debe expresarse como una función definida por tramos:

$$f(x) = \frac{x+1}{|x|} = \begin{cases} \frac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

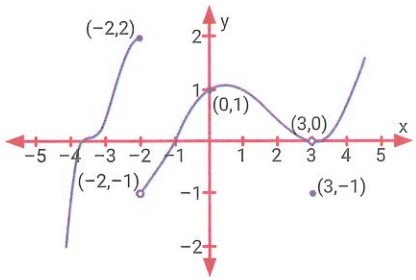
5 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

55. Si $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 1} g(x) = -2$, ¿cuál es el valor del $\lim_{x\to 1} \sqrt{2f(x) + g(x)}$?

◯ 2 ◯ $2\sqrt{2}$ ◯ No es posible calcular.

56. Observen el gráfico y respondan: ¿cuál de estos límites es falso?



◯ $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -1$ ◯ $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -2$

◯ $\lim_{x\to 3} f(x) = -1$ ◯ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

57. ¿Qué condición se cumple si el valor del límite $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$?

◯ El grado de Q(x) es mayor que el grado de P(x).

◯ El grado de Q(x) es menor que el grado de P(x).

◯ El grado de Q(x) es igual que el grado de P(x).

58. ¿Cuáles deben ser los valores de $t \in \mathbb{R}$ para que la función sea continua en todo su dominio?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \le t \\ 2x^2 + 3 & \text{si } x > t \end{cases}$$

◯ $t = -1$ ◯ $t = 1$ ◯ $t = -1; t = 1$ ◯ Ninguna de las anteriores.

59. Dada la función $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$.

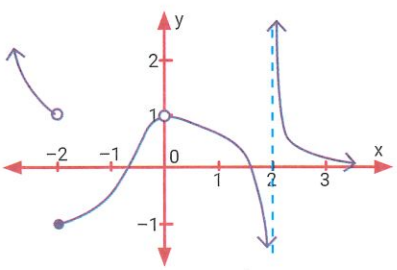
a. ¿Cuál es su asíntota vertical?

◯ $x = 0$ ◯ $x = -1$ ◯ $x = 1$ ◯ Ninguna de las anteriores.

b. ¿Cuál es su asíntota oblicua?

◯ $y = x$ ◯ $y = x + 1$ ◯ $y = x - 1$ ◯ Ninguna de las anteriores.

60. Dado el siguiente gráfico.



a. ¿En qué valor de x presenta una discontinuidad evitable?

◯ $x = -2$ ◯ $x = 0$ ◯ $x = 2$

b. ¿En qué valor de x presenta una discontinuidad de salto finito?

◯ $x = -2$ ◯ $x = 0$ ◯ $x = 2$

c. ¿En qué valor de x presenta una discontinuidad de salto infinito?

◯ $x = -2$ ◯ $x = 0$ ◯ $x = 2$

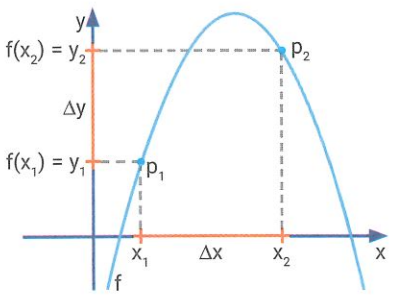
6 Derivadas

31. Concepto de derivada

▶ SABERES DINÁMICOS

Dados dos puntos $p_1 = (x_1; y_1)$ y $p_2 = (x_2; y_2)$, pertenecientes a una función f(x) continua en el intervalo real $[x_1; x_2]$, se denomina **incremento de x o Δx** a la variación que experimenta la variable independiente x al pasar de x_1 (abscisa inicial) a x_2 (abscisa final): $\Delta x = x_2 - x_1$.

Del mismo modo, la variable dependiente **y** (correspondiente a cada abscisa) experimenta otra variación $\Delta y = y_2 - y_1$ denominada **incremento de y**.

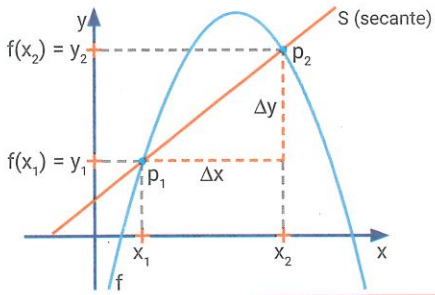


Derivada de una función

En toda función f(x) continua en el intervalo real $[x_1; x_2]$, por los puntos $p_1 = (x_1; y_1)$ y $p_2 = (x_2; y_2)$ se puede trazar una recta secante a f(x) cuya pendiente es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

cociente incremental



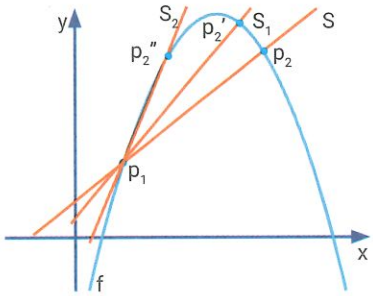
Para recordar pág. 135

A medida que el punto p_2 se mueve a lo largo de la curva representativa de f(x) aproximándose al punto p_1 (considerado fijo), las pendientes de las rectas secantes que pasan por esos puntos van cambiando. Esto se debe a que Δx va disminuyendo cuando p_2 se acerca a p_1.

Para el caso extremo en el que p_2 tiende a p_1, la recta secante tiende a ser una **recta tangente**.

En este caso, si existe, la pendiente de la recta tangente es:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$



El límite del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero, recibe el nombre de derivada de una función f(x) y se simboliza **f'(x)**. Si este límite existe, se dice que la función es derivable o admite derivada.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

← Definición de derivada de una función.

31. Concepto de derivada

Interpretación geométrica de la derivada

La derivada de f(x) cuando $x = x_1$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en el punto de abscisa x_1.

$f(x) = 3x^2$ $\quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 3x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 3x^2}{\Delta x} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 6x + \lim_{\Delta x \to 0} 3\Delta x = 6x + 0 = \mathbf{6x}$

$f'(x) = 6x$ permite calcular la pendiente de la recta tangente a $f(x) = 3x^2$ en el punto de abscisa x_1.

Si $x_1 = 1$, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa 1 es $f'(1) = 6 \cdot 1 = 6$.

Si $x_1 = -2$, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa -2 es $f'(-2) = -12$.

Áreas dinámicas [Matemática y Física]

La velocidad media de un móvil que se desplaza con ecuación de posición en función del tiempo dada por r(t), se define como el cociente entre el desplazamiento Δr realizado por un móvil en un intervalo de tiempo Δt.

$$v_m(t) = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea de un móvil es el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero, es decir, es la derivada de la posición respecto al tiempo.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = r'(t)$$

ACTIVIDADES

31. Concepto de derivada

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que para calcular la pendiente de una recta secante a una curva debe hallarse $\frac{\Delta x}{\Delta y}$?

b. ¿Cómo debe ser Δx si se quiere hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto?

c. ¿Cuántos puntos en común, como mínimo, tiene una recta tangente a una curva?

2. Encuentren la pendiente de la recta secante a cada una de las funciones en los puntos indicados en cada caso y grafiquen en sus carpetas la situación.

a. $f(x) = x^2$; $x_0 = 1$; $x_1 = 3$

b. $f(x) = (x - 1)^2 + 2$; $x_0 = 2$; $x_1 = -1$

c. $f(x) = |x|$; $x_0 = -1$; $x_1 = 1$

d. $f(x) = 2^{x-1}$ en $x_0 = 0$; $x_1 = 2$

3. Encuentren el valor de la derivada de cada función en el punto indicado.

a. $f(x) = 4x + 2$ en $x_0 = 3$

b. $f(x) = x^2 - 1$en $x_0 = -1$

c. $f(x) = (x - 1)^3$ en $x_0 = 2$

d. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ en $x_0 = 0$

32. Derivación de funciones elementales

▶ SABERES DINÁMICOS

Para hallar la derivada de una función en un punto se debe aplicar la definición de derivada y resolver el límite resultante. Si la definición se plantea en un punto genérico, se halla la derivada de la función.
Aplicando entonces la definición a algunas funciones es posible generar la siguiente tabla.

Función f(x)	Derivada f'(x)	Ejemplo
$f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$Si\ f(x) = 4 \Rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$Si\ f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $Si\ f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$ $Si\ f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$	$Si\ f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$Si\ f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = a^x$ con $a > 0$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$Si\ f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$ $Si\ f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$	$Si\ f(x) = \log_3 x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_3 e$ $Si\ f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_e e = \frac{1}{x}$

Reglas de derivación

Regla de derivación	Lenguaje simbólico
De una constante por una función	$Si\ f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$
De la suma algebraica de funciones	$Si\ s(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Del producto de funciones	$Si\ p(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Del cociente de funciones	$Si\ w(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow w'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Hallen la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 4 \operatorname{sen} x + e^x \Rightarrow f'(x) = (4 \operatorname{sen} x)' + (e^x)' \Rightarrow \mathbf{f'(x) = 4 \cos x + e^x}$

b. $f(x) = \frac{x^2}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2)' \cos x - x^2 (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x \cos x - x^2 (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \Rightarrow \mathbf{f'(x) = \frac{2x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}}$

Derivadas sucesivas de una función

Como ya se ha mencionado, siempre que sea posible hallar la derivada de una función f(x), lo que se obtiene es otra función que se simboliza **f'(x)** y se **denomina derivada de f(x)**. Si a esta nueva función se la vuelve a derivar, lo que se obtiene es otra función que será la **derivada de la función derivada de f(x)**. A esta nueva función se la denomina **derivada segunda de f(x) o de segundo orden** y se simboliza **f''(x)**. Si este proceso se aplica sucesivamente, se obtendrán las derivadas de orden superior de la función f(x).

Hallen la derivada de cuarto orden de la función $f(x) = x^3 + \operatorname{sen} x$.

$f'(x) = 3x^2 + \cos x \Rightarrow f''(x) = 6x - \operatorname{sen} x \Rightarrow f'''(x) = 6 - \cos x \Rightarrow \mathbf{f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x}$

ACTIVIDADES

32. Derivación de funciones elementales

Test de comprensión

4. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que la derivada de $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = e^x \cdot \cos x$?

b. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$?

c. ¿Hasta qué orden es posible derivar un polinomio de grado n sin que su derivada sea nula?

5. Hallen la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 4^x$

b. $f(x) = \cos x + x$

c. $f(x) = x^3 - \ln x$

d. $f(x) = \sqrt{x} + \operatorname{sen} x$

6. Indiquen el valor de a en cada caso a partir de la expresión de f'(x).

a. La derivada de la función $f(x) = ax^2$ es $f'(x) = 4x$ si:

- $a = 1$ ☐
- $a = 2$ ☐
- $a = 4$ ☐

b. La derivada de la función $g(x) = \log_a x$ es $g'(x) = \frac{1}{x}$ si:

- $a = e$ ☐
- $a = 10$ ☐
- $a = 1$ ☐

c. La derivada de la función $h(x) = a \cos x$ es $h'(x) = -\operatorname{sen} x$ si:

- $a = -1$ ☐
- $a = 0$ ☐
- $a = 1$ ☐

d. La derivada de la función $i(x) = ax^3$ es $i'(x) = -9x^2$ si:

- $a = -9$ ☐
- $a = 3$ ☐
- $a = -3$ ☐

7. Hallen la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 2x^5 + \ln x$

b. $f(x) = x^2 \cdot 2^x$

c. $f(x) = 6 \operatorname{sen} x - 8 \cos x$

d. $f(x) = x^3 + \sqrt{x} - x$

e. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

f. $f(x) = \cos x + \sqrt[3]{x^2} - \log x$

32. Derivación de funciones elementales

8. Unan con flechas cada una de las funciones con su correspondiente derivada.

a. $f(x) = \text{tg}\, x$	• $\text{tg}\, x \,.\, \sec x$
b. $f(x) = \sec x$	• $\text{cosec}^2 x$
c. $f(x) = \text{cosec}\, x$	• $\sec^2 x$
d. $f(x) = \text{cotg}\, x$	• $-\text{cotg}\, x \,.\, \text{cosec}\, x$

9. Determinen el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto indicado.

a. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - 4 \cos x$ en $x = \frac{\pi}{2}$

b. $f(x) = x^2 \,.\, e^x$ en $x = 1$

c. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + x^3$ en $x = 1$

d. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ en $x = \frac{1}{2}$

10. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. La recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \ln x$ tiene pendiente nula cuando $x = 1$. ☐

b. La recta tangente al gráfico de la función $f(x) = -2 \,.\, \operatorname{sen} x + 3 \,.\, \cos x$ es creciente en $x = \pi$. ☐

c. La derivada de una función lineal se corresponde con el valor de su pendiente para todo valor de x. ☐

d. La derivada del producto de dos funciones es equivalente al producto de las derivadas de esas funciones. ☐

32. Derivación de funciones elementales

11. Completen la tabla con la derivada del orden pedido en cada caso, siempre que sea posible.

Función	Orden de la derivada sucesiva	
$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x$	3	
$f(x) = \ln x + \operatorname{sen} x$	2	
$f(x) = e^x - 2x^5$	4	
$f(x) = x \cdot \cos x$	2	
$f(x) = \frac{\ln x}{x}$	2	

12. Lean atentamente. Luego, planteen y resuelvan.

En física la derivada de la ecuación de posición en función del tiempo, dada por x(t) de un cuerpo, permite hallar su velocidad instantánea en función del tiempo, es decir, x'(t) = v(t). Además, se conoce que la derivada de la velocidad v'(t), es decir, la derivada segunda de la posición x"(t), permite hallar la ecuación de aceleración en función del tiempo.

Si la ecuación de posición en función del tiempo para un móvil que se mueve en línea recta viene dada por: $x(t) = 2\frac{m}{s^2}t^2 - 3\frac{m}{s}t + 3m$ donde x se expresa en metros y t, en segundos, calculen.

a. La posición inicial del objeto.

b. La velocidad inicial con la que comenzó el movimiento.

c. La velocidad luego de haber transcurridos 10 segundos de comenzar el movimiento.

d. El valor de su aceleración a los 5 segundos.

33. Derivación de funciones compuestas

▶ SABERES DINÁMICOS

Sean dos funciones **y = f(u)** y **u = g(x)**, se define la **composición entre las funciones f(u) y g(x)** como: **y = f[g(x)]**. Y se simboliza **y = (f o g)(x)**.
La composición de funciones puede ser interpretada como una función y = f(u) cuya variable es otra función u = g(x); de esta manera si se quiere hallar la derivada de la función compuesta y = (f o g)(x) = f[g(x)], se aplica la **regla de derivación en cadena**, que consiste en:

$$y' = [(f \circ g)(x)]' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

Así, aplicar la regla de la cadena, consiste en derivar la función f(u) y multiplicarla por la derivada de la función u.

a. Sea la función $y = \text{sen}(x^2 + 1)$, donde $u = x^2 + 1 \wedge f(u) = \text{sen}(u)$, aplicando la regla de la cadena la derivada de la función compuesta y es:

$y' = (\text{sen}\, u)' \cdot u' \Rightarrow y' = \cos(u) \cdot u' \Rightarrow \mathbf{y' = \cos(x^2 + 1) \cdot 2x}$

b. Sea la función $y = (e^x - 2)^3$, donde $u = e^x - 2 \wedge f(u) = u^3$, aplicando la regla de la cadena la derivada de la función compuesta y es:

$y' = (u^3)' \cdot u' \Rightarrow y' = 3u^2 \cdot u' \Rightarrow \mathbf{y' = 3(e^x - 2)^2 \cdot e^x}$

c. Sea la función $y = \ln(\cos x)$, donde $u = \cos x \wedge f(u) = \ln u$, aplicando la regla de la cadena la derivada de la función compuesta y es:

$y' = (\ln u)' \cdot u' \Rightarrow y' = \frac{1}{u} \cdot u' \Rightarrow \mathbf{y' = -\frac{1}{\cos x} \cdot \text{sen}\, x}$

Debe tenerse en cuenta que cuando se deriva una función simple, también se aplica la regla de la cadena, por ejemplo, si se quiere aplicar la regla en la derivada de la función y = cos x, la función u = x, y como la derivada es 1, la regla se vería aplicada de la siguiente manera:

Sea la función $y = \cos x$, donde $u = x \wedge f(u) = \cos u$, aplicando la regla de la cadena, la derivada de la función compuesta y es: $y' = (\cos u)' \cdot u' \Rightarrow y' = -\text{sen}\, u \cdot u' \Rightarrow \mathbf{y' = -\text{sen}\, x \cdot 1}$

Por esta razón, es importante notar que la aplicación de la regla de la cadena es indispensable cuando se quiere determinar la derivada de una función compuesta.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/dericade * para mirar un video donde se explican ejemplos del uso de la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

*Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=m_5-WS9Nd68

ACTIVIDADES

33. Derivación de funciones compuestas

Test de comprensión

13. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es correcto afirmar que la derivada de la función $f(x) = \ln(x^3 + 2x - 1)$ puede realizarse sin la aplicación de la regla de la cadena?

b. Sea la función $y = (\operatorname{sen} x)^4$, ¿su derivada es $y' = 4(\cos x)^3$?

c. Teniendo en cuenta la regla de la cadena, ¿cuál es la derivada de la función $y = \operatorname{sen}[\ln(x^2)]$?

14. Hallen la función compuesta $y = (f \circ g)(x)$ en cada caso.

a. $f(x) = \ln(x) \wedge g(x) = x^4 + 3$

b. $f(x) = \operatorname{sen}(x) \wedge g(x) = \sqrt{x}$

c. $f(x) = x^2 \wedge g(x) = \cos x$

d. $f(x) = e^x \wedge g(x) = x^3 + 1$

15. Calculen la derivada de cada una de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena.

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$

b. $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}^2(5x)$

c. $f(x) = e^{x^3} \cdot \cos x$

d. $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

e. $f(x) = \cos(2 - x) + \ln 2$

f. $f(x) = x^4 \cdot \ln(x^2 + 4)$

16. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. La derivada de la función $y = \cos^2 x$ es igual a la de la función $y = \cos(x^2)$. ☐

b. La derivada de la función $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ es $y' = \dfrac{1}{x} \cdot \cos x$. ☐

c. La recta tangente a la gráfica de la función $y = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$ en el punto $x = 2$ es creciente. ☐

34. Recta tangente y recta normal

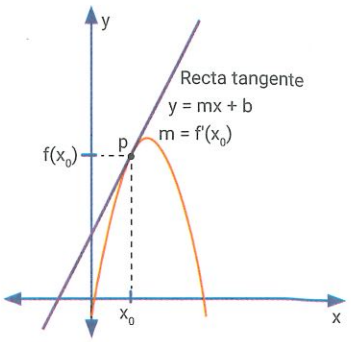
▶ SABERES DINÁMICOS

Recta tangente al gráfico de una función en un punto

La interpretación geométrica de la derivada de una función f(x) en un punto $[x_0; f(x_0)]$ está asociada al valor de la pendiente de la **recta tangente** a la gráfica de la función en x_0. Es decir, $\mathbf{m_{tg} = f'(x_0)}$.

La expresión de la **recta tangente** al gráfico de f(x) en x_0 es entonces:

$$y_{tg} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

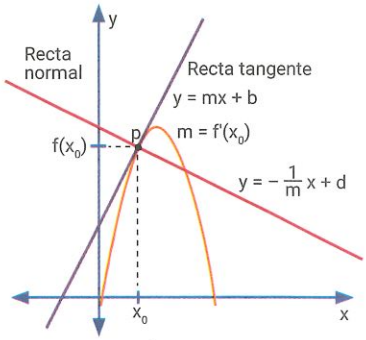


Recta normal al gráfico de una función en un punto

La **recta normal** al gráfico de una curva f(x) en el punto $[x_0; f(x_0)]$ es la recta perpendicular a la recta tangente definida en ese mismo punto. Teniendo en cuenta la relación que existe entre las pendientes de dos rectas perpendiculares, la pendiente de la recta normal es: $\mathbf{m_{normal} = -\frac{1}{f'(x_0)}}$.

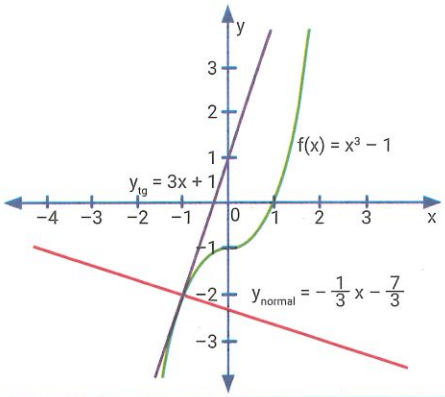
La ecuación de la **recta normal** al gráfico de f(x) en $x = x_0$ es:

$$y_{normal} = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$



Para encontrar las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal al gráfico de una función f(x) en $[x_0; f(x_0)]$ se pueden seguir los siguientes pasos:

Dada la función $f(x) = x^3 - 1$, encuentren la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a su gráfica en $x_0 = -1$.



Pasos	Ejemplo
1. Encontrar la derivada de la función f(x) y evaluarla en el punto x_0.	*La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2$.* *Entonces $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$.*
2. Buscar el valor que toma la función en x_0, es decir, hallar $f(x_0)$.	*En $x = -1$, la función vale $f(-1) = -2$.*
3. Calcular los valores de las pendientes de las rectas tangente y normal, respectivamente.	*Pendiente de la recta tangente* $m_{tg} = f'(-1) = 3$ *Pendiente de la recta normal* $m_{normal} = -\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{3}$
4. Teniendo en cuenta las expresiones de las rectas tangente y normal, se expresan sus ecuaciones.	***Recta tangente*** $y_{tg} = 3[x - (-1)] + (-2) = 3(x + 1) - 2 \Rightarrow y_{tg} = 3x + 1$ ***Recta normal*** $y_{normal} = -\frac{1}{3}[x - (-1)] + (-2) = -\frac{1}{3}(x + 1) - 2 \Rightarrow y_{normal} = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$

ACTIVIDADES

34. Recta tangente y recta normal

Test de comprensión

17. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Si la derivada de una función en x_0 es $f'(x_0) = 0$, ¿cómo es su recta tangente?

b. Si la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x(x - 1)$ en $x = 2$ es $y = 3x - 4$, ¿la ecuación de la recta normal de la función en $x = 2$ es $y = -\frac{1}{3}x - 4$?

c. Si la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ es $y = \frac{1}{4}x - 1$, ¿es cierto que $f'(1) = 4$?

18. Completen la siguiente tabla con lo pedido, luego grafiquen en sus carpetas la curva con las rectas tangentes y normales en un mismo sistema de ejes coordenados.

Función	x_0	Recta tangente en x_0	Recta normal en x_0
$f(x) = x(1 - x)$	0		
$f(x) = x^3 - x$	−1		
$f(x) = \ln x + 2$	1		
$f(x) = \frac{x-2}{x+1}$	−4		

19. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas en sus carpetas.

a. La ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \ln(x + 3)$ en $x = -2$ es $y = x + 2$. ☐

b. Si la recta tangente al gráfico de la función $f(x)$ en $x = 3$ es $y = 2x - 1$, entonces $f'(3) = -2$. ☐

c. Si la ecuación de la recta normal al gráfico de la función $f(x)$ en $x = 0$ es $y = \frac{2}{3}x + 1$, entonces el punto $(0; 1)$ pertenece al gráfico de la función. ☐

d. La recta tangente en $x = -1$ de la función $f(x) = e^{x+1} - 3x$ es paralela a la recta de ecuación $y = -2x + 1$. ☐

20. Hallen lo pedido en cada caso. Luego, realicen el gráfico en sus carpetas.

a. Las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de la función $f(x) = x^2 - x$ en $x = -1$.

b. Las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de la función $f(x) = \ln(2x - 5)$ en $x = 3$.

21. Marquen la opción correcta en cada caso.

a. La ecuación de la recta normal al gráfico de la función $f(x) = x^2 - 3x$ en $x = 2$ es:

- $y = -x + 2$ ☐
- $y = x + 2$ ☐
- $y = -x$ ☐
- $y = -x + 1$ ☐
- $y = -x + 1$ ☐

b. La ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x = -1$ es:

- $y = -2x + 5$ ☐
- $y = 2x + 5$ ☐
- $y = 3x + 5$ ☐
- $y = 2x + 3$ ☐
- $y = -2x + 3$ ☐

22. Completen la tabla con lo pedido en cada caso.

Función	x_0	x_1	Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$f(x) = x^2 - 2x + 1$	0	3			
$f(x) = 2^x - 1$	0	2			
$f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$	$\frac{\pi}{2}$	π			
$f(x) = \sqrt{x}$	1	4			
$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$	$\frac{1}{2}$	3			
$f(x) = mx + b$	x	x + h			
$f(x) = ax^2$	x	x + h			

23. Hallen la derivada de cada una de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada.

a. $f(x) = 2x^2 - x$

b. $f(x) = x^3 + 2x$

c. $f(x) = 5x - 1$

d. $f(x) = 4\sqrt{x}$

e. $f(x) = \frac{1}{x}$

f. $f(x) = (x - 1)^2 + 3$

24. Completen la tabla con la derivada de cada una de las siguientes funciones aplicando reglas de derivación.

Función	Función derivada	Reglas aplicadas
$f(x) = \cos(x) + 2x$		
$f(x) = 2e^x - \ln x$		
$f(x) = x^3 . \operatorname{sen}(x)$		
$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$		

25. Unan con flechas el valor de cada una de las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ • $f'(0) = 4$

b. $f(x) = 4 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$ • $f'(1) = 2$

c. $f(x) = e^x . (x^2 + 1)$ • $f'(-1) = 4$

d. $f(x) = 2x^3 - x^4$ • $f'(0) = 1$

e. $f(x) = \frac{x+2}{x^2}$ • $f'(1) = -\frac{1}{2}$

f. $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - x^2$ • $f'(-1) = 3$

26. Hallen la derivada de cada una de las siguientes funciones compuestas.

a. $f(x) = \cos(3x + x^2)$

b. $f(x) = e^{x^2 + x}$

c. $f(x) = \ln[\operatorname{sen}(x^2)]$

d. $f(x) = (x^3 + 2^x)^4$

e. $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$

f. $f(x) = \cos[\ln(x^4)]$

27. Completen con la derivada de cada función del orden pedido en cada caso.

Función	Derivada sucesiva
$f(x) = x^3 - 6x$	$f'''(x) =$
$f(x) = \operatorname{sen}(2x) + \cos x$	$f''(x) =$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$f''(x) =$
$f(x) = x^3 . e^x$	$f'''(x) =$
$f(x) = \operatorname{sen} x + e^x$	$f^{iv}(x) =$

28. Encuentren para cada una de las siguientes funciones los valores de las pendientes de las rectas tangente y normal en cada uno de los puntos indicados.

a. $f(x) = \ln(x^2 - 3)$ en $x_0 = 2$

b. $f(x) = \operatorname{sen}(2x) + \cos(x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$

c. $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ en $x_0 = 4$

d. $f(x) = e^{x^3 - 1} . x^2$ en $x_0 = 1$

e. $f(x) = (x^4 - 2x)^3$ en $x_0 = 1$

29. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. La recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$ es paralela al eje de abscisas. ☐

b. La ecuación de la recta normal al gráfico de $f(x) = 2e^{x-3} - x^2$ en $x = 3$ es $y_n = 7x + 5$. ☐

c. La ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ en $x = 0$ es perpendicular a la recta de ecuación $4x + y = 3$. ☐

30. Completen la tabla con la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función en el punto indicado en cada caso.

Función	Punto	Recta tangente
$f(x) = x^2 + 3x - 5$	$x = -1$	
$f(x) = \cos(2x) - \operatorname{sen} x$	$x = 0$	
$f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$	$x = -2$	
$f(x) = \sqrt{x-2}$	$x = 6$	
$f(x) = x.\ln(x+3)$	$x = -2$	

31. Completen la tabla con la ecuación de la recta normal al gráfico de la función en el punto indicado en cada caso.

Función	Punto	Recta normal
$f(x) = 5x^2 - 2x + 1$	$x = 1$	
$f(x) = (x-1)^2 . e^x$	$x = 0$	
$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$	$x = -1$	
$f(x) = 2.\operatorname{sen}(x) + \cos(2x)$	$x = 0$	
$f(x) = \ln(x^2 - 3)$	$x = -2$	

32. Hallen lo pedido en cada caso.

a. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$, sabiendo que $f'(1) = 3$ y que $f(1) = 2$.

b. La ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x = -2$, sabiendo que la ecuación de la tangente en ese punto es $y = \frac{1}{2}x - 1$.

33. Completen los espacios vacíos con los valores correctos en cada caso.

a. La recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x$ es paralela a la recta $y = -3x + 1$ en el punto ☐.

b. La recta tangente a $f(x) = x . e^{-x}$ es paralela al eje de abscisas si ☐.

c. La recta normal a $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ es perpendicular a la recta $y = -\frac{4}{3}x + 1$ en los puntos ☐ y ☐.

d. La recta tangente a $f(x) = x^2(x+1)$ es paralela a la recta $y = x - 2$ en los puntos ☐ y ☐.

34. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. Si la ecuación de la recta tangente a una función en $x = a$ es $y = 3x + 1$, se puede asegurar que la ecuación de la recta normal es $y = -\frac{1}{3}x + 1$. ☐

b. Si la recta tangente a una función es paralela al eje de abscisas, la recta normal lo será al eje de ordenadas. ☐

c. La ecuación de la recta normal al gráfico de $f(x) = x^2.\sqrt{x}$ en $x = 1$ es $y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$. ☐

d. La recta tangente a $f(x) = \operatorname{sen} x - 3 . \cos x$ en $x = 0$ es $y = -x - 3$. ☐

e. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ presenta dos rectas tangentes paralelas a la recta $y = 11x - 1$. ☐

35. Planteen y resuelvan lo pedido en cada caso.

a. El valor de a para que la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = e^{a(x-1)}.x$ en el punto $x = 1$ sea paralela a la recta $-3x + y - 1 = 0$.

b. El valor de m si la ecuación de la recta normal al gráfico de $f(x) = mx^2 - 4x + 12$ en $x = 8$ es paralela la recta $8y + x - 8 = 0$.

c. Los valores de b y c si la recta tangente a $f(x) = x^2 + bx + c$ en $x = 2$ es $y = -x + 14$.

35. Extremos relativos

▶ SABERES DINÁMICOS

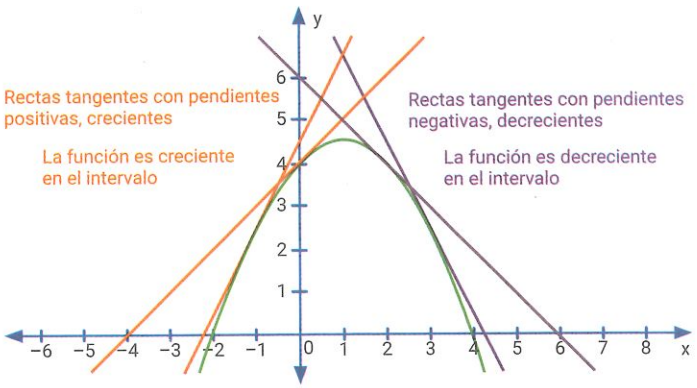
Una **función es creciente** en un intervalo **I** si, para todo par de valores x_1 y x_2 del intervalo se cumple:

si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Es decir, al aumentar el valor de la variable independiente siempre aumenta el valor de la función.

De forma análoga, una **función es decreciente** en un intervalo **I** si, para todo par de valores x_1 y x_2 del intervalo, se cumple: **si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$**

Es decir, al aumentar el valor de la variable independiente siempre disminuye el valor de la función.



Una forma de **analizar el crecimiento** y **decrecimiento de una función en un intervalo (a; b)** es hacerlo a través de los valores que toman las pendientes de las rectas tangentes en los puntos de dicho intervalo. Así, cuando las **rectas tangentes** sean **crecientes**, sus **pendientes** serán **positivas** y la **función** será **creciente** al igual que sus rectas tangentes. Cuando las **rectas tangentes** sean **decrecientes**, sus **pendientes** serán **negativas** y la **función** será **decreciente**, al igual que sus rectas tangentes. Como la pendiente de la recta tangente al gráfico de una función es el valor que toma la derivada de la función en dicho valor, entonces:

si $f'(x) > 0\ \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ es creciente en (a; b) **si $f'(x) < 0\ \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en (a; b)**

Para recordar pág. 135

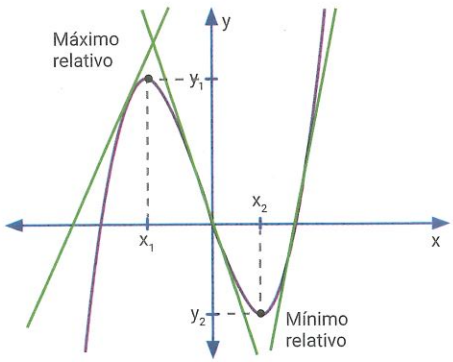
Puntos críticos de una función

Una función presenta un **punto crítico en $x = a \in D_f$ si no existe $f'(a)$ o si $f'(a) = 0$.**

Extremos relativos

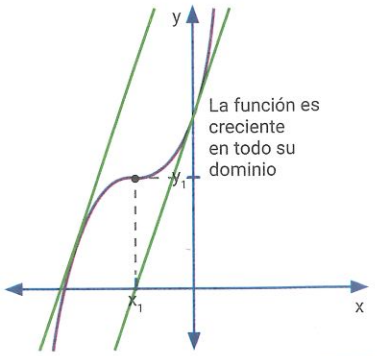
Una función alcanza un **máximo relativo en x_1** si el valor de su derivada cambia de positivo a negativo en x_1, es decir, es creciente a izquierda de x_1 y decreciente a derecha.

Una función alcanza un **mínimo relativo en x_2** si el valor de su derivada cambia de negativo a positivo en x_2, es decir, es decreciente a izquierda de x_2 y creciente a derecha.



	$(-\infty; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; +\infty)$
$f'(x)$	Positiva	0	Negativa	0	Positiva
$f(x)$	Crece	**Máx.**	Decrece	**Mín.**	Crece

Algunas funciones pueden presentar un punto crítico y, sin embargo, no alcanzar ni un máximo ni un mínimo en ese punto. Es decir, el signo de su derivada no cambia a izquierda y a derecha del punto crítico.



ACTIVIDADES

35. Extremos relativos

Test de comprensión

36. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Si una función presenta un extremo relativo en $x = a$, ¿siempre se cumple que $f'(a) = 0$?

b. ¿Es cierto que si $f'(a)$ no existe, la función tiene un extremo relativo en $x = a$?

c. ¿Es cierto que todo punto crítico de una función es un extremo relativo de la función? ¿Qué condición debe cumplirse para asegurarlo?

37. Completen la tabla con lo pedido.

Función	Intervalos de crecimiento	Intervalos de decrecimiento
$f(x) = 4x - x^2$		
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$		
$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$		
$f(x) = x^2 . e^x$		
$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$		

38. Completen, en caso de existir, con los extremos relativos de cada una de las siguientes funciones.

Función	Extremos relativos	
$f(x) = 4x - x^2$	Máximos:	Mínimos:
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$	Máximos:	Mínimos:
$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$	Máximos:	Mínimos:
$f(x) = x^2 . e^x$	Máximos:	Mínimos:
$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$	Máximos:	Mínimos:

39. Reúnanse con un compañero y hallen los máximos y mínimos, si existen, de cada función. Realicen un gráfico aproximado de cada una de ellas.

a. $f(x) = e^x . (x - 1)$

b. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

36. Concavidad

▶ SABERES DINÁMICOS

Una función **f(x) es cóncava hacia arriba o cóncava positiva** en un intervalo, cuando las rectas tangentes al gráfico de la función se ubican por debajo de su gráfica.
En forma análoga, **f(x) es cóncava hacia abajo o cóncava negativa**, cuando las rectas tangentes a su gráfica se disponen por encima de su gráfico.
Los **mínimos relativos de f(x)** se encuentran en los intervalos donde f(x) es cóncava hacia arriba; teniendo en cuenta esto se puede concluir que los valores de las pendientes de sus rectas tangentes aumentan, por lo tanto, **f'(x) crece**; por ese motivo **f''(x) es positiva en dicho intervalo**.
Los **máximos relativos de f(x)** se encuentran en los intervalos donde f(x) es cóncava hacia abajo; teniendo esto en cuenta se puede concluir que los valores de las pendientes de sus rectas tangentes disminuyen, por lo tanto, **f'(x) decrece**; por ese motivo **f''(x) es negativa en dicho intervalo**. En resumen:

$$\text{Si } f''(x) > 0 \ \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia arriba en } (a; b)$$

$$\text{Si } f''(x) < 0 \ \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo en } (a; b)$$

Puntos de inflexión

Una función **f(x) presenta un punto de inflexión en $x = a \in D_f$ si la función cambia su concavidad en x = a.**
Los valores del dominio de una función que son posibles puntos de inflexión son aquellos en los que se cumple alguna de estas situaciones:

$$f''(a) = 0 \vee f''(a) \text{ no existe}$$

Hallen, si existen, los puntos de inflexión de $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2$.

Como f(x) es polinómica, su dominio es $D_f = \mathbb{R}$*; buscamos su derivada segunda:*

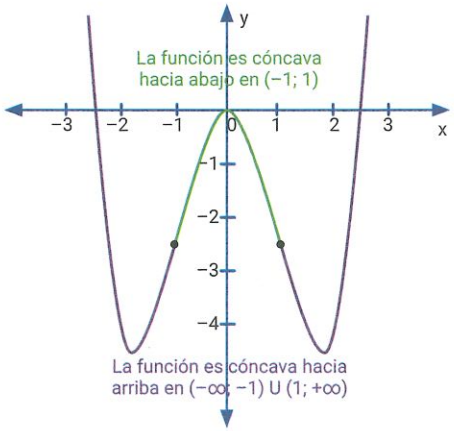
$f'(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x^2 - 6 \Rightarrow$ *Dominio de* $f''(x) = \mathbb{R}$

Los posibles puntos de inflexión de la función se encuentran igualando la derivada segunda a cero, ya que no hay puntos donde la derivada segunda no exista.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$ ***x = ±1 posibles puntos de inflexión***

Ahora se analizan los intervalos de positividad y negatividad de la derivada segunda:

	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
f''(x)	Positiva	0	Negativa	0	Positiva
f(x)	Cóncava hacia arriba	**Punto de inflexión**	Cóncava hacia abajo	**Punto de inflexión**	Cóncava hacia arriba



36. Concavidad

Test de comprensión

40. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Si $f''(a) = 0$, ¿se puede asegurar que $x = a$ es un punto de inflexión de $f(x)$?

b. Sabiendo que $f'(x)$ decrece en un intervalo, ¿cómo es la concavidad de $f(x)$ en ese intervalo?

c. Si $f'(a) = 0$ y $x = a$ es un mínimo relativo de $f(x)$, ¿qué signo tiene $f''(x)$ en $x = a$?

41. Indiquen cuál o cuáles son los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a. La función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$ presenta puntos de inflexión en:

- $x = -1$ ☐
- $x = -4$ ☐
- $x = 1$ ☐
- No tiene. ☐

b. La función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ presenta puntos de inflexión en:

- $x = \sqrt{3}$ ☐
- $x = 0$ ☐
- $x = -\sqrt{3}$ ☐
- No tiene. ☐

c. La función $f(x) = x \cdot e^{-x}$ presenta puntos de inflexión en:

- $x = 0$ ☐
- $x = 2$ ☐
- $x = 1$ ☐
- No tiene. ☐

d. La función $f(x) = \frac{x - 1}{3 - x}$ presenta puntos de inflexión en:

- $x = 3$ ☐
- $x = 1$ ☐
- $x = 2$ ☐
- No tiene. ☐

42. Completen el cuadro con los intervalos de concavidad de cada una de las siguientes funciones.

Función	Concavidad negativa	Concavidad positiva
$f(x) = x^3 - x$		
$f(x) = \frac{2x}{x+2}$		
$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$		
$f(x) = e^{-x^2}$		

43. Encuentren los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de las siguientes funciones. Luego, realicen un gráfico aproximado de cada una de ellas.

a. $f(x) = x^3 - 3x$

b. $f(x) = x^4 - 3x^3 - x + 1$

37. Análisis y gráfico de funciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Cuando se quiere realizar un gráfico aproximado de una función es necesario hacer un estudio detallado de las características de la función.
Los pasos que comúnmente se deben seguir son:

- Hallar su dominio.
- Estudiar su paridad.
- Hallar las intersecciones, si existen, de la función con los ejes coordenados.
- Encontrar las ecuaciones de sus asíntotas.
- Hallar su derivada primera y los puntos críticos de la función.
- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Calcular sus extremos relativos.
- Hallar su derivada segunda y los posibles puntos de inflexión.
- Determinar los intervalos de concavidad positiva y negativa.
- Calcular sus puntos de inflexión.
- Realizar, con la información hallada, un gráfico aproximado de la función.

Ejemplo: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

- *Dominio de* $f(x) = \mathbb{R}$
- $f(x) \neq f(-x) \wedge f(x) \neq -f(-x) \Rightarrow$ ***f(x) No tiene paridad.***
- *Ordenada al origen:* $f(0) = 0 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow$ ***f(0) = 2***
- *Raíces:* $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 1 - \sqrt{3}; x_3 = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow$ $\boldsymbol{C_0 = \{1; 1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}\}}$

$\boldsymbol{C^- = (-\infty; 1 - \sqrt{3}) \cup (1; 1 + \sqrt{3}); C^+ = (1 - \sqrt{3}; 1) \cup (1 + \sqrt{3}; +\infty)}$

- ***No posee asíntotas*** *por ser una función polinómica.*
- $f'(x) = 3x^2 - 6x$; *dominio de* $f'(x) = \mathbb{R}$; *el único tipo de puntos críticos se encuentra cuando* $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = 0; x_2 = 2}$ ***puntos críticos***
- *Intervalos de crecimiento y decrecimiento:*

	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
f'(x)	Positiva	0	Negativa	0	Positiva
f(x)	Crece	**Máximo relativo**	Decrece	**Mínimo relativo**	Crece

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/anfurep * para mirar un video donde se explican ejemplos de análisis de funciones y sus representaciones.

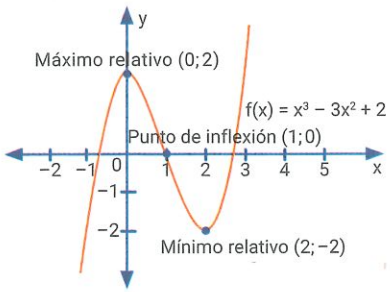
*Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=vmegw722HLA

- *La función presenta un* ***máximo relativo en (0; 2)*** *y un* ***mínimo relativo en (2; −2).***
- $f''(x) = 6x - 6$; *dominio de* $f''(x) = \mathbb{R}$, *el único tipo de posibles puntos de inflexión se encuentra cuando* $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = 1}$ ***posible punto de inflexión.***
- *Intervalos de concavidad positiva y negativa:*

	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
f''(x)	Negativa	0	Positiva
f(x)	Cóncava hacia abajo	**Punto de inflexión**	Cóncava hacia arriba

La función presenta un ***punto de inflexión en (1; 0).***

- *Gráfico aproximado:*



ACTIVIDADES

37. Análisis y gráfico de funciones

Test de comprensión

44. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que el dominio de una función siempre es el conjunto de los números reales? ¿En qué casos debe restringirse el dominio de una función?

b. Si una función no tiene puntos de inflexión, ¿se puede afirmar que siempre tiene la misma concavidad?

c. ¿Cuál es la cantidad de raíces que puede tener una función? ¿Y ordenadas al origen? ¿Por qué?

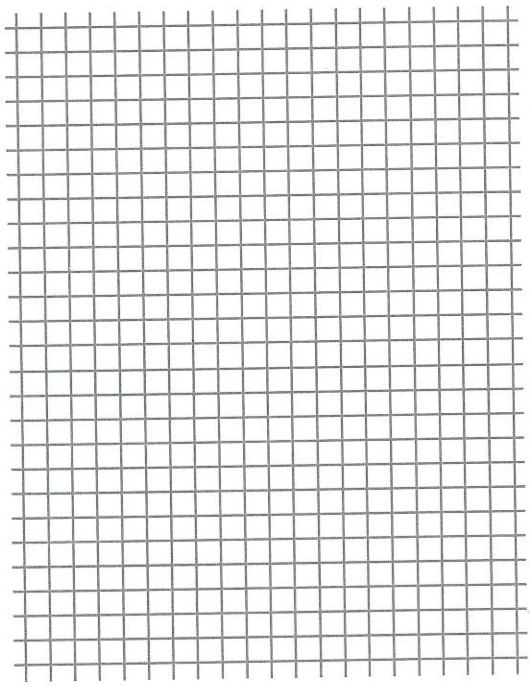
45. Completen la tabla con lo pedido para cada una de las siguientes funciones.

Función	Dominio	Ceros	Ordenada al origen
$f(x) = \frac{x+1}{x^2}$			
$f(x) = e^{-x}.(x-1)$			
$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$			
$f(x) = \ln(x^2 - 1)$			

46. Indiquen lo pedido para la siguiente función. Luego, realicen el gráfico.

$f(x) = x^3 - 3x$

- Dominio: _____
- Paridad: _____
- C_0: _____
- C^+: _____
- C^-: _____
- Asíntotas: _____
- Máximos relativos: _____
- Mínimos relativos: _____
- Crecimiento: _____
- Decrecimiento: _____
- Puntos de inflexión: _____
- Concavidad positiva: _____
- Concavidad negativa: _____

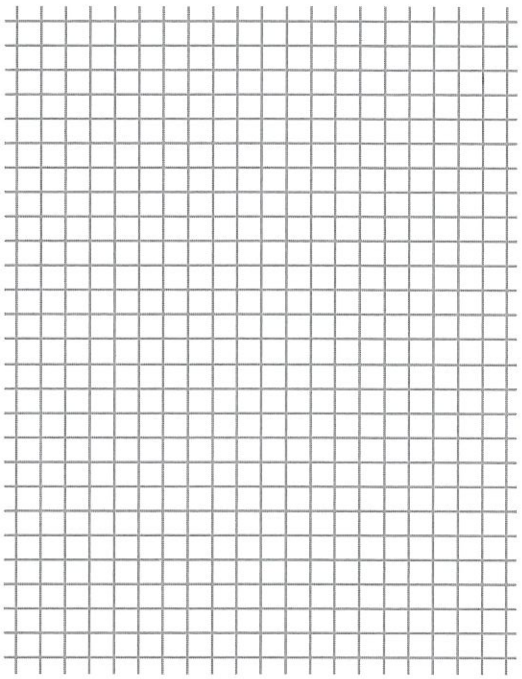


37. Análisis y gráfico de funciones

47. Realicen el análisis completo de cada una de las siguientes funciones. Luego, grafiquen cada función.

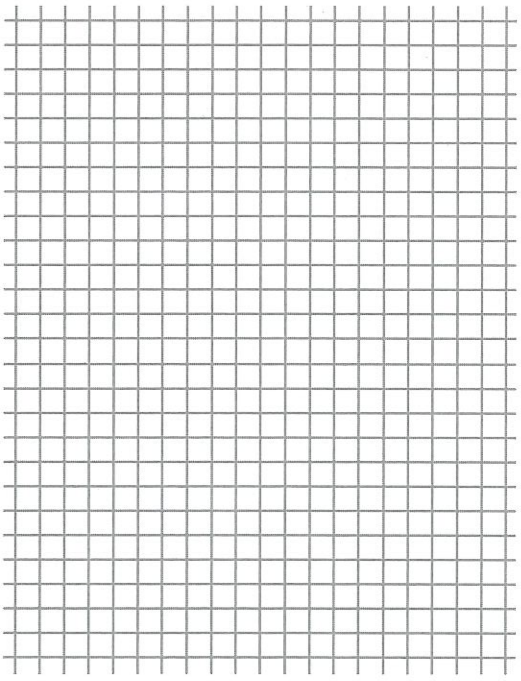
a. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

- Dominio: _____
- Paridad: _____
- C_0: _____
- C^+: _____
- C^-: _____
- Asíntotas: _____
- Máximos relativos: _____
- Mínimos relativos: _____
- Crecimiento: _____
- Decrecimiento: _____
- Puntos de inflexión: _____
- Concavidad positiva: _____
- Concavidad negativa: _____



b. $f(x) = -2\cos(x)$ en $[-\pi; \pi]$

- Dominio: _____
- Paridad: _____
- C_0: _____
- C^+: _____
- C^-: _____
- Asíntotas: _____
- Máximos relativos: _____
- Mínimos relativos: _____
- Crecimiento: _____
- Decrecimiento: _____
- Puntos de inflexión: _____
- Concavidad positiva: _____
- Concavidad negativa: _____

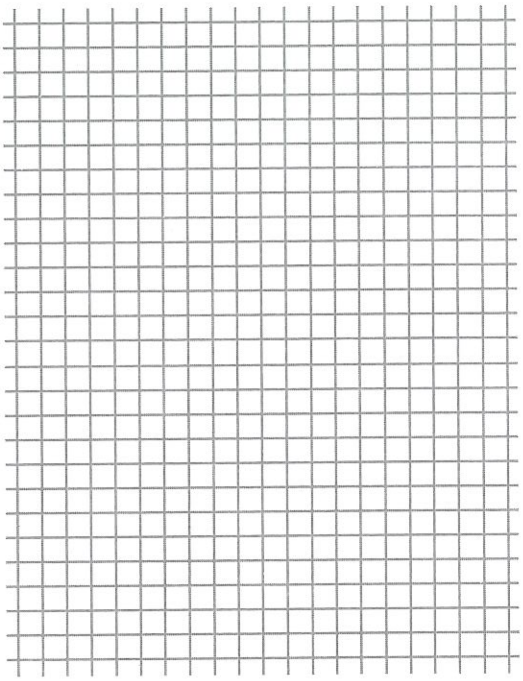


37. Análisis y gráfico de funciones

48. **Realicen el análisis completo de cada una de las siguientes funciones. Luego, grafiquen cada función.**

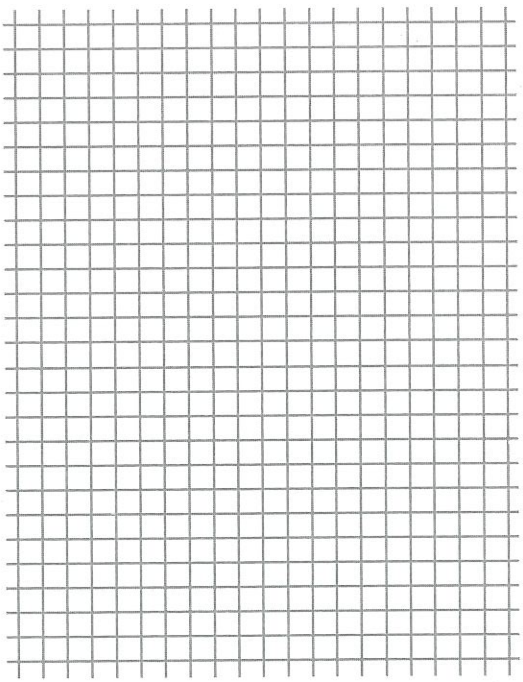
a. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

- Dominio: _____
- Paridad: _____
- C_0: _____
- C^+: _____
- C^-: _____
- Asíntotas: _____
- Máximos relativos: _____
- Mínimos relativos: _____
- Crecimiento: _____
- Decrecimiento: _____
- Puntos de inflexión: _____
- Concavidad positiva: _____
- Concavidad negativa: _____



b. $f(x) = \frac{2}{x^2 - 9}$

- Dominio: _____
- Paridad: _____
- C_0: _____
- C^+: _____
- C^-: _____
- Asíntotas: _____
- Máximos relativos: _____
- Mínimos relativos: _____
- Crecimiento: _____
- Decrecimiento: _____
- Puntos de inflexión: _____
- Concavidad positiva: _____
- Concavidad negativa: _____



38. Optimización

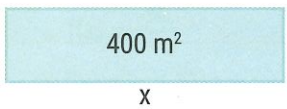
▶ SABERES DINÁMICOS

Conocer los valores máximos y mínimos que puede alcanzar una función, cuando se cumplen determinadas condiciones, puede ser útil para resolver problemas en los cuales sea necesario optimizar el valor de alguna variable. **Optimizar una función** implica conocer el valor máximo o mínimo para el cual la situación es la más favorable dentro de un conjunto de condiciones a cumplir.
Estas situaciones reciben el nombre de problemas de optimización.

Para resolver este tipo de situaciones es necesario, generalmente:

1. Leer el problema e identificar la magnitud o función a optimizar (maximizar o minimizar, según el problema).
2. Siempre que sea posible, realizar un esquema de la situación e indicar las variables del problema.
3. Plantear la función a optimizar; en el caso de ser una función que dependa de más de una variable, deberá plantearse una relación de vínculo entre ellas.
4. Despejar de la relación de vínculo o restricción una de las variables y reemplazarla en la función a optimizar.
5. Encontrar los extremos relativos de la función y determinar el o los valores que optimicen la situación planteada inicialmente.

Se quiere cercar un terreno de forma rectangular de 400 m². El precio del metro lineal de la cerca es de $200. ¿Cuáles serán las dimensiones del terreno que hacen que el costo de cercado sea mínimo?
Esquema de la situación:



Función a optimizar → Costo = 200(2x + 2y)
Vínculo → Área = x . y → x . y = 400

Como la función a optimizar depende de dos variables, del vínculo se despeja una de ellas y se la reemplaza en la función a optimizar.

$$y = \frac{400}{x} \rightarrow Costo = 200\left(2x + 2 \cdot \frac{400}{x}\right) \rightarrow C(x) = 400x + \frac{160000}{x}$$ *(Función a optimizar)*

Planteada la función a optimizar, se halla su derivada y se procede a encontrar los extremos relativos:

$$C'(x) = 400 - \frac{160000}{x^2} \rightarrow C'(x) = 0 \rightarrow 400 - \frac{160000}{x^2} = 0 \rightarrow 400 = \frac{160000}{x^2} \rightarrow x^2 = \frac{160000}{400} \rightarrow x^2 = 400$$

Los puntos críticos son: $x = \pm \sqrt{400} \rightarrow \mathbf{x = 20}$*; solo nos sirve el valor positivo, por ser una longitud. Para determinar si es un máximo o un mínimo relativo, analizamos el valor que toma la derivada segunda en el punto crítico hallado:*

$$C''(x) = \frac{320000}{x^3} \rightarrow C''(x) > 0 \Rightarrow \mathbf{x = 20\ m}$$ *es un mínimo.*

Por último, las dimensiones del terreno de 400 m² de área que minimizan el costo del cercado son:

$$x = 20\ m;\ y = \frac{400\ m^2}{20\ m} = 20\ m$$

El terreno que hace que el costo sea menor es un cuadrado de 20 m de lado.

38. Optimización

Test de comprensión

49. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener un rectángulo de 100 m de perímetro para que tenga la mayor área posible?

b. Para asegurar que una función alcanza un máximo o un mínimo relativo, ¿basta con hallar las raíces de su derivada?

c. ¿Qué se debe analizar para afirmar que una función alcanza un extremo en $x = a$?

50. Lean atentamente, planteen y resuelvan los siguientes problemas.

a. Un granjero dispone de 1 000 m de tela metálica para construir un vallado rectangular. Para minimizar el costo aprovechará una pared ya existente como un lado del rectángulo. Hallen las dimensiones de la cerca para que el área encerrada sea máxima.

b. Se quiere construir un depósito abierto en forma de prisma recto de base cuadrada y capacidad de 4 m^3. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del depósito para que la cantidad de material utilizado sea mínima?

c. Hallen dos números enteros, tales que su suma resulte 10 y la resta de uno de ellos menos el inverso del otro sea mínima.

d. De todos los rectángulos de perímetro 12 cm, hallen el que tiene menor diagonal.

DinámicaMente

Un triángulo rectángulo está formado por los semiejes positivos y una recta que pasa por el punto (4; 2). Hallen la ecuación de la recta de modo que el área del triángulo sea mínima.

Integración final

51. Hallen los extremos relativos de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

b. $f(x) = x^5 - 5x + 6$

c. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

d. $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

e. $f(x) = -2x \cdot e^x$

f. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

52. Analicen, a partir del signo de la derivada primera, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x \cdot (x - 2)$

b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

c. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

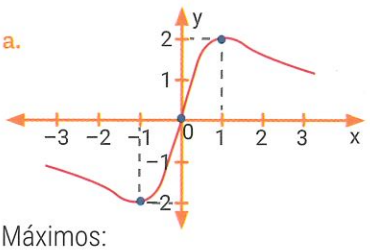
d. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$

e. $f(x) = \frac{x^2}{x + 3}$

f. $f(x) = (x - 1) \cdot e^{-x}$

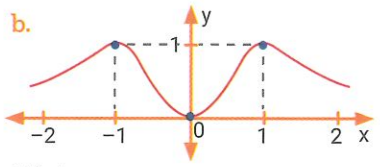
53. Observen los gráficos y completen con lo pedido en cada caso.

a.



Máximos:
Mínimos:
Paridad:
Crecimiento:
Decrecimiento:

b.



Máximos:
Mínimos:
Paridad:
Crecimiento:
Decrecimiento:

54. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. Si $f'(2) = 0$, entonces la función $f(x)$ presenta un extremo relativo en $x = 2$. ☐

b. Si $f'(x) > 0$, en el intervalo $(-a; a)$ la función $f(x)$ es creciente en $x = \frac{a}{2}$. ☐

c. Si $f'(x)$ crece en el intervalo $(2; 4)$, la función $f(x)$ es cóncava negativa en ese intervalo. ☐

d. Si $f'(3) > 0$, entonces la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(2; 4)$. ☐

e. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces la función $f(x)$ presenta un mínimo en $x = a$. ☐

f. Si $f''(1) < 0$, entonces la función $f(x)$ es cóncava negativa en el intervalo $(0; 3)$. ☐

55. Indiquen los intervalos de concavidad de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 3x - x^3$

b. $f(x) = x^3 \cdot (x + 2)$

c. $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 60x$

d. $f(x) = \text{sen}(2x)$ en $[0; \pi]$

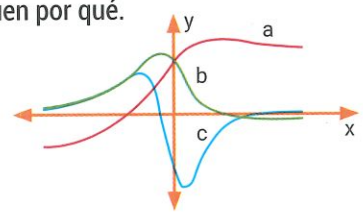
e. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

f. $f(x) = \frac{9x}{x^2 + 9}$

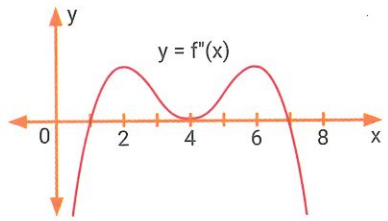
56. Realicen el gráfico de una función que cumpla con lo pedido.

- La función $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty; -2)$ y $(0; 3)$.
- Alcanza un máximo relativo en $(-2; 4)$ y otro en $(3; 6)$.
- Alcanza un mínimo relativo en $(0; 0)$.
- Tiene puntos de inflexión en los puntos $(-1; 2)$, $(2; 3)$ y $(5; 2)$.

57. La figura muestra las gráficas de f(x), f'(x) y f"(x). Indiquen cuál corresponde a cada una y expliquen por qué.



58. A partir de la gráfica de la derivada segunda de f(x) continua en $\mathbb{R}$, indiquen lo pedido.



a. Los posibles puntos de inflexión de f(x).

b. Los intervalos de concavidad positiva y negativa de f(x).

c. Los puntos de inflexión de f(x).

59. Analicen las siguientes funciones y realicen el gráfico aproximado.

a. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

b. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

c. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

d. $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$

e. $f(x) = x^2 . e^x$

f. $f(x) = (1 - x^2) . e^x$

60. Rodeen la opción correcta en cada caso.

a. Un terreno rectangular de 900 m² necesita ser vallado. El precio del metro lineal del material para cercarlo es de $200. Para gastar lo menos posible, la expresión de la función a optimizar es:

- $f(x) = 400x + \frac{360\,000}{x}$
- $f(x) = 2x + \frac{1\,800}{x}$
- $f(x) = 400x + \frac{180\,000}{x}$
- $f(x) = 400x - \frac{1\,800}{x}$

b. De los rectángulos que tienen diagonal 6, se busca el rectángulo de mayor perímetro posible. Si los lados del rectángulo son "x" e "y", la función a optimizar es:

- $f(x) = x . \sqrt{36 - x^2}$
- $f(x) = 2x + 2 . \sqrt{6 - x^2}$
- $f(x) = x . \sqrt{6 - x^2}$
- $f(x) = 2x + 2 . \sqrt{36 - x^2}$

c. Con 20 metros lineales de madera se construye un cuadro que debe tener la mayor área posible sabiendo que "x" es la medida de la base del cuadro e "y", la de la altura. La función a optimizar es:

- $f(x) = 10x . x^2$
- $f(x) = 10x - x^2$
- $f(x) = 10x + x^2$
- $f(x) = 10 + x^2$

61. Planteen y resuelvan, aplicando conceptos de derivadas, los siguientes problemas.

a. Encuentren dos números positivos cuya suma sea 20 y el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

b. Encuentren dos números reales, tales que su suma sea 40 y su producto sea máximo.

c. Encuentren el número diferente de cero, tal que la suma con su inverso sea mínima.

62. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. De los rectángulos de 1 m² de área, el que tiene mayor perímetro es el cuadrado. ☐

b. De los rectángulos de 1 m de perímetro, el que tiene el área máxima es el cuadrado. ☐

63. Planteen y resuelvan los siguientes problemas. Realicen un gráfico, cuando sea posible.

a. Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 10 cm de largo por 18 cm de ancho. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se lo doblará hacia arriba. ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

b. Calculen las dimensiones de un triángulo isósceles, base y altura, de 8 cm de perímetro y que tenga área máxima.

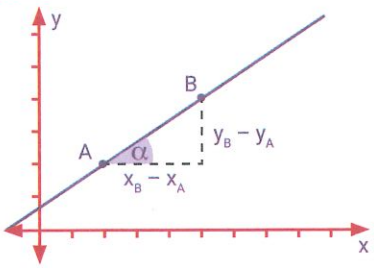
c. Encuentren las dimensiones del triángulo rectángulo, tal que la suma de sus catetos sea 40 cm y tenga área máxima.

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Sean dos puntos $A = (x_A; y_A)$ y $B = (x_B; y_B)$, se define la pendiente m de la recta que pasa por los puntos A y B como:



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \text{tg } \hat{\alpha} \text{ con } x_B \neq x_A \text{ o también } m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Determinación del dominio de una función

Para poder determinar cuál es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente de una función, se debe tener en cuenta que existen algunas operaciones para las cuales la función no está definida:

I. Cociente de denominador nulo.
II. Radicando negativo de una raíz de índice par.
III. Argumentos de logaritmos negativos.

Intervalos reales

Ciertos conjuntos de números reales se denominan **intervalos**, y se representan geométricamente con semirrectas o segmentos sobre la recta real. Si **a** y **b** son **números reales** tales que **a < b**, entonces existen las siguientes posibilidades:

Notación	Propiedad del conjunto	Representación sobre la recta real
(a; b)	$x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b$	a b
[a; b]	$x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b$	a b
[a; b)	$x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b$	a b
(a; b]	$x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b$	a b
(a; +∞)	$x \in \mathbb{R} \wedge x > a$	a
[a; +∞)	$x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a$	a
(−∞; b)	$x \in \mathbb{R} \wedge x < b$	b
(−∞; b]	$x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b$	b
(−∞; +∞)	$x \in \mathbb{R}$	

6 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

64. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = \text{sen}[\ln(x^2 + 4)]$?

- ◯ $f'(x) = \cos[\ln(2x)]$
- ◯ $f'(x) = \cos\left(\frac{1}{2x}\right)$
- ◯ $f'(x) = \cos\left[\ln\left(\frac{2x}{x^2+4}\right)\right]$
- ◯ $f'(x) = \cos[\ln(x^2 + 4)] \cdot \frac{2x}{x^2+4}$

65. ¿Para qué valor de x la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = \frac{2x}{e^{x-1}}$ es paralela al eje de abscisas?

- ◯ $x = 0$
- ◯ $x = e$
- ◯ $x = 1$
- ◯ $x = -1$

66. ¿En qué punto la recta normal al gráfico de $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ es paralela a la recta $y = \frac{1}{3}x - 1$?

- ◯ $(-1; 2)$
- ◯ $(1; 2)$
- ◯ $(1; 5)$
- ◯ No existe el punto.

67. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{\ln(x+1)}}$?

- ◯ $(-1; +\infty)$
- ◯ $(-1; 0) \cup (0; +\infty)$
- ◯ $[-1; +\infty)$
- ◯ $[-1; 0) \cup (0; +\infty)$

68. ¿En cuáles intervalos crece la función $f(x) = 4x^2 \cdot (x^2 - 2)$?

- ◯ $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
- ◯ $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$
- ◯ $(-1; 1)$
- ◯ $(1; +\infty)$

69. ¿Cuál es el valor de la abscisa en el que la función $f(x) = 4x^2 \cdot e^{-(x+1)}$ presenta un máximo relativo?

- ◯ $x = 0$
- ◯ $x = 2$
- ◯ $x = -1$
- ◯ $x = 1$

70. ¿Para qué valor de a la función $f(x) = 2x^3 - ax^2 - 5x + 4$ presenta un punto de inflexión cuando $x = 1$?

- ◯ $a = 0$
- ◯ $a = -6$
- ◯ $a = 6$
- ◯ $a = 4$

71. Una página rectangular debe contener 24 cm^2 de texto impreso, con márgenes superior e inferior de 1,5 cm y laterales de 1 cm.
¿Cuáles son las dimensiones de la página que hacen que la cantidad de papel utilizado sea mínima?

- ◯ 6 cm x 9 cm
- ◯ 3 cm x 4,5 cm
- ◯ 30 cm x 12 cm
- ◯ 6 cm x 4 cm

7 Integrales

39. Función primitiva. Integrales definidas

▶ SABERES DINÁMICOS

A una función F(x) se la denomina **primitiva** o **antiderivada** de f(x) si al derivar F(x) se obtiene f(x) en un intervalo I.

F(x) es primitiva de f(x) ⇔ F'(x) = f(x) ∀ x ∈ I

La primitiva de una misma función difiere en una constante aditiva, pues la derivada de una constante es cero.

Primitiva	Derivada de F(x)
$F(x) = x^3$	$f(x) = 3x^2$
$F(x) = \text{sen}(x)$	$f(x) = \cos x$
$F(x) = \ln(x)$	$f(x) = \frac{1}{x}$

El proceso de encontrar la primitiva de una función se denomina **integración.**

Expresión simbólica	Se lee
$\int f(x) \, . \, dx$	Integral indefinida de la función f(x)
$\int f(x) \, . \, dx = F(x) + C \Leftrightarrow [F(x) + C]' = f(x)$	

a. $\int \cos x \, . \, dx = \text{sen}\, x + C \Leftrightarrow (\text{sen}\, x + C)' = \cos x$

b. $\int (x - 5) \, . \, dx = \frac{1}{2}x^2 - 5x + C \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x^2 - 5x + C\right)' = x - 5$

Reglas de integración

- Suma algebraica de funciones: $\int [f(x) \pm g(x)] \, . \, dx = \int f(x) \, . \, dx \pm \int g(x) \, . \, dx$
- Producto de una constante por una función: $\int k \, . \, f(x) \, . \, dx = k \, . \int f(x) \, . \, dx$

Tabla de primitivas inmediatas

Integral	Primitiva	Ejemplo
$\int dx$	$x + C$	$\int 2 \, . \, dx = 2 \int dx = 2x + C$
$\int x^n \, . \, dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; (n \neq -1)$	$\int x^4 \, . \, dx = \frac{x^5}{5} + C$
$\int \frac{1}{x} \, . \, dx$	$\ln \lvert x \rvert$	$\int \frac{1}{2x} \, . \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} \, . \, dx = \frac{1}{2} \ln \lvert x \rvert + C$
$\int a^x \, . \, dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int 3^x \, . \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$
$\int e^x \, . \, dx$	$e^x + C$	$\int 2e^x \, . \, dx = 2 \int e^x \, dx = 2e^x + C$
$\int \text{sen}\, x \, . \, dx$	$-\cos x + C$	$\int -2 \, \text{sen}\, x \, . \, dx = -2 \int \text{sen}\, x \, . \, dx = 2 \cos x + C$
$\int \cos x \, . \, dx$	$\text{sen}\, x + C$	$\int 6 \cos x \, . \, dx = 6 \int \cos x \, . \, dx = 6 \, \text{sen}\, x + C$

ACTIVIDADES

39. Función primitiva. Integrales definidas

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. $\int \sqrt{x}\,.\,dx$ ¿es $\frac{1}{2\sqrt{x}} + C$?

b. $3x^2 + 5$ y $3x^2 - 2$ ¿son ambas primitivas de $6x$?

c. $\int (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)\,.\,dx$, ¿es $x + C$?

Para recordar pág. 149

2. Indiquen en cada caso si F(x) es una primitiva de f(x). Expliquen la respuesta.

a. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 5 \wedge f(x) = x$

b. $F(x) = \frac{1}{x} + 5 \wedge f(x) = \ln|x| + 5x$

c. $F(x) = \ln|x| + e^x + e^2 \wedge f(x) = \frac{1}{x} + e^x$

3. Calculen las siguientes integrales.

a. $\int (x + 1)\,.\,dx =$

b. $\int (x^2 + x - 1)\,.\,dx =$

c. $\int \left(\frac{2}{x} + x^3 - \operatorname{sen} x\right).\,dx =$

d. $\int (3e^x - \sqrt{x})\,.\,dx =$

e. $\int 2\,.\,(\cos x + 1)\,.\,dx =$

f. $\int (x + 1)^2\,.\,dx =$

4. Hallen la función f en cada caso, teniendo en cuenta los datos.

a. $f'(x) = \operatorname{sen} x \wedge f(0) = -3$

b. $f'(x) = \frac{5}{x} \wedge f(e) = 7$

c. $f'(x) = 2 + \sqrt{x} \wedge f(1) = 1$

d. $f'(x) = 3\,.\cos x - 2\,.\operatorname{sen} x \wedge f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$

e. $f'(x) = 4x^2 + e^x \wedge f(0) = 2$

f. $f'(x) = 3\sqrt{x} - 3x^3 \wedge f(1) = 4$

40. Integración por sustitución

▶ SABERES DINÁMICOS

El método de **integración por sustitución** se aplica para hallar ciertas integrales que no pueden calcularse directamente y, en general, tienen las siguientes formas:

$$\int \underbrace{f(x)}_{u} . \underbrace{f'(x) . dx}_{du} = \int u . du \quad \text{v} \quad \int \underbrace{f[g(x)]}_{u} . \underbrace{g'(x) . dx}_{du} = \int f(u) . du$$

• Para resolver se efectúa un cambio de variable.

a. $\int tg\,x . dx = \int \frac{sen\,x}{cos\,x} . dx \rightarrow$ *hacemos* $u = cos\,x \rightarrow du = -sen\,x . dx \rightarrow \int -\frac{du}{u} \rightarrow -ln|u| + C$

reemplazando u por $cos\,x \rightarrow$ *obtenemos:* $\mathbf{-ln|cos\,x| + C}$

b. $\int \frac{ln|x|}{x} . dx \rightarrow$ *hacemos* $u = ln|x| \rightarrow du = \frac{1}{x} . dx \rightarrow \int u . du = \frac{u^2}{2} + C$

reemplazando u por $ln|x|$*, obtenemos:* $\mathbf{\frac{ln^2|x|}{2} + C}$

• No necesariamente **du** es exactamente igual a **g'(x) . dx** o **f '(x) . dx**, debiéndose realizar entonces algún procedimiento matemático para igualar ambas expresiones.

a. $\int sen\,(x^2 + 4x + 2)(x + 2) . dx \rightarrow$ *hacemos* $u = x^2 + 4x + 2 \rightarrow du = (2x + 4) . dx \rightarrow du = 2(x + 2) . dx$

$\rightarrow \frac{du}{2} = (x + 2) . dx \rightarrow \int sen\,u . \frac{du}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} cos\,u + C$

reemplazando u por $x^2 + 4x + 2$*, obtenemos:*

$\mathbf{-\frac{1}{2} cos\,(x^2 + 4x + 2) + C}$

b. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x} . dx \rightarrow$ *hacemos* $u = x^2 + 2x \rightarrow du = (2x + 2) . dx \rightarrow du = 2(x + 1) . dx \rightarrow \frac{du}{2} = (x + 1) . dx$

$\rightarrow \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} ln|u| + C \rightarrow$ *reemplazando u por* $x^2 + 2x$*, obtenemos:*

$$\mathbf{\frac{1}{2} ln|x^2 + 2x| + C}$$

ACTIVIDADES

40. Integración por sustitución

Test de comprensión

5. Respondan y expliquen las respuestas.

a. $\int \frac{1}{e^{2x}} . dx$ ¿es $e^{-2x} + C$?

b. $u = \text{sen}(2x)$, entonces ¿es $dx = \frac{du}{2 . \cos(2x)}$?

c. $\int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x} . dx$ ¿se puede resolver por sustitución?

6. Resuelvan cada una de las siguientes integrales aplicando el método de sustitución.

a. $\int (\cos(4x) . dx =$

b. $\int \frac{1}{x + 3} . dx =$

c. $\int \frac{dx}{(2x - 1)^2} =$

d. $\int \frac{\ln|2x + 8|}{2x + 8} . dx =$

e. $\int e^{\cos x} . \text{sen}\, x . dx =$

f. $\int x . e^{x^2} . dx =$

7. Verifiquen que F_1 y F_2 son primitivas de $f(x) = \text{sen}\, x . \cos x$.

a. $F_1 = \frac{1}{2} \text{sen}^2 x + 5$

b. $F_2 = -\frac{1}{2} \cos^2 x + 2$

8. Hallen la función f(x) en cada caso.

a. $f'(x) = x(x^2 + 2)$ y $f(1) = \frac{9}{4}$

b. $f'(x) = \frac{2x - 5}{6 - 5x + x^2}$ y $f(1) = \frac{1}{2}$

c. $f'(x) = \frac{\cos(\ln|x|)}{x}$ y $f(1) = 3$

d. $f'(x) = (x + 1)^3$ y $f(-2) = -\frac{1}{2}$

41. Integración por partes

▶ SABERES DINÁMICOS

La **integración por partes** es un método que se utiliza, en general, para integrar un producto de funciones que no cumple con las condiciones para ser integrado por sustitución.

- La derivada de un producto es: $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- Integrando miembro a miembro: $\int [u(x) \cdot v(x)]' \cdot dx = \int [u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)] \cdot dx$
- La primitiva de $[u(x) \cdot v(x)]'$ es: $u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) \cdot dx + \int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx$
- Despejando $\int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx$: $\int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) \cdot dx$
- La integral de un producto de funciones es: $\mathbf{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$

Para poder integrar correctamente se deben elegir de manera conveniente **u** y **dv**. Para ello existe una convención que, a pesar de no ser rigurosa, es muy útil. La misma establece que se debe elegir como **u** a la función que sea, en orden de prioridad: inversa, logarítmica, polinómica, exponencial o trigonométrica.

a. $\int x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx \rightarrow u = x \rightarrow du = dx$

$$dv = \operatorname{sen} x \cdot dx \rightarrow \int dv = \int \operatorname{sen} x \cdot dx \rightarrow v = -\cos x$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \rightarrow \int x \operatorname{sen} x \cdot dx =$$

$$x(-\cos x) - \int -\cos x \cdot dx =$$

$$\mathbf{-x \cos x + \operatorname{sen} x + C}$$

b. $\int (x-2)e^x \cdot dx \rightarrow u = x - 2 \rightarrow du = dx$

$$dv = e^x \cdot dx \rightarrow \int dv = \int e^x \cdot dx \rightarrow v = e^x$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \rightarrow \int x\, e^x \cdot dx \rightarrow (x-2)e^x - \int e^x \cdot dx =$$

$$(x-2)e^x - e^x =$$

$$\mathbf{e^x(x-3) + C}$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/intcic * para mirar un video sobre la resolución de integrales cíclicas (son aquellas donde al integrar por partes aparece en el segundo miembro la integral que hay que calcular).

* Enlace acortado de https://youtu.be/fQWziGhpklM

41. Integración por partes

Test de comprensión

9. Respondan y expliquen las respuestas.

a. La integral del producto entre dos funciones, ¿es igual al producto de las integrales de cada una de ellas?

b. ¿Es posible combinar métodos para resolver una integral?

c. $\int 5^x \,.\, x \,.\, dx$ ¿se puede integrar por partes?

10. Resuelvan cada una de las siguientes integrales aplicando el método por partes.

a. $\int x \,.\, \cos x \,.\, dx =$

b. $\int x \,.\, \ln|x| \,.\, dx =$

c. $\int x^3 \,.\, \ln\left|\frac{1}{x}\right| \,.\, dx =$

d. $\int x^2 \,.\, \cos x \,.\, dx =$

e. $\int \frac{1}{x} \ln x \,.\, dx =$

f. $\int e^x \,.\, x^2 \,.\, dx =$

11. Hallen la función f(x) para que cumpla las condiciones dadas.

a. $f'(x) = x \,.\, e^x$ y $f(0) = 4$

b. $f'(x) = \operatorname{sen} x \,.\, (x + 1)$ y $f(\pi) = 2\pi + 1$

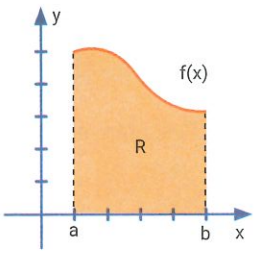
c. $f'(x) = 2x^3 \,.\, \ln x$ y $f(1) = 2$

d. $f'(x) = (x + 2) \,.\, e^x$ y $f(0) = 5$

42. Integrales definidas. Regla de Barrow

▶ SABERES DINÁMICOS

Si una función f(x) es continua en un intervalo [a; b] y determina con el eje x una región R, en dicho intervalo existe un único valor real que es la **integral definida** de f(x).

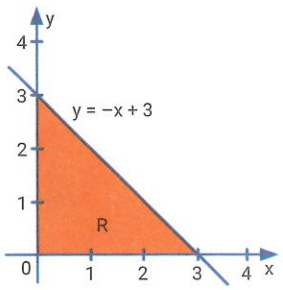


Integral definida de f(x) en el intervalo [a; b]

$\int_a^b f(x)\,.\,dx$ — Límite superior de la integración; Límite inferior de la integración

La **regla de Barrow** permite calcular integrales definidas:

$$\int_a^b f(x)\,.\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$



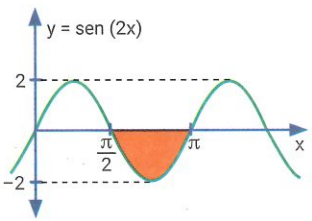
a. $\int_0^3 (-x + 3)\,.\,dx =$

Calculamos la primitiva: $\int_0^3 (-x + 3)\,.\,dx = -\frac{x^2}{2} + 3x$

Aplicamos la regla de Barrow

$$\int_0^3 (-x + 3)\,.\,dx = -\frac{x^2}{2} + 3x\Big|_0^3 = \left(-\frac{3^2}{2} + 3\,.\,3\right) - \left(-\frac{0^2}{2} + 3\,.\,0\right) = \frac{9}{2} - 0 = 4{,}5$$

b. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\,(2x)\,.\,dx =$



Calculamos la primitiva:

$\int sen\,(2x)\,.\,dx =$ *hacemos* $u = 2x \rightarrow du = 2\,.\,dx \rightarrow \frac{du}{2} = dx$

Como aplicamos sustitución, se deben hallar los límites de integración respecto a la variable u.

$x_1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow u_1 = 2\,.\,\frac{\pi}{2} \rightarrow u_1 = \pi \qquad x_2 = \pi \rightarrow u_2 = 2\pi$

Luego: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\,(2x)\,.\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} sen\,(u)\,.\,\frac{du}{2} = -\frac{1}{2}\,.\,(\cos u)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\frac{1}{2}\,(\cos 2\pi - \cos \pi) = -1$

Propiedades de las integrales definidas

1. $f(x) \geq 0 \wedge x \in [a; b] \rightarrow \int_a^b f(x)\,.\,dx \geq 0$
2. $f(x) < 0 \wedge x \in [a; b] \rightarrow \int_a^b f(x)\,.\,dx < 0$
3. $\int_a^c f(x)\,.\,dx = \int_a^b f(x)\,.\,dx + \int_b^c f(x)\,.\,dx$ donde $a < b < c$
4. $\int_a^b f(x)\,.\,dx = -\int_b^a f(x)\,.\,dx$

Áreas dinámicas [Matemática y Física]

Con frecuencia, la fuerza que produce un trabajo es variable durante el tiempo de aplicación, ya sea porque se altera su módulo, su dirección o su sentido. Para calcular el valor de este trabajo se utiliza una integral extendida a todo el recorrido.

$$W = \int_a^b f(x)\,.\,dx$$

ACTIVIDADES

42. Integrales definidas. Regla de Barrow

Test de comprensión

12. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que $\int_0^1 f(x)\,.\,dx + \int_2^5 f(x)\,.\,dx = \int_0^5 f(x)\,.\,dx$?

b. $\int_a^b f(x)\,.\,dx$ ¿puede valer 0?

c. ¿Es cierto que $\int_a^b f(x)\,.\,dx = \int_b^a -f(x)\,.\,dx$?

13. Calculen, aplicando la regla de Barrow, cada una de las siguientes integrales.

a. $\int_1^4 \sqrt{x}\,.\,dx =$

b. $\int_{-1}^4 e^{-x+1}\,.\,dx =$

c. $\int_1^e \frac{\ln|x|}{x}\,.\,dx =$

d. $\int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} =$

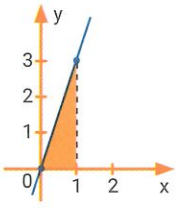
14. Calculen lo solicitado en cada caso.

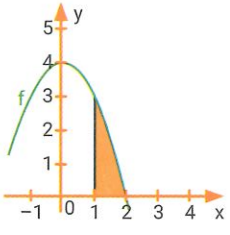
a. $\int_0^3 [f(x) - 2]\,.\,dx$, sabiendo que: $\int_0^3 f(x)\,.\,dx = 5$.

b. El valor de "a" para que: $\int_1^a \frac{8}{x}\,.\,dx = 4$.

15. Observen los siguientes gráficos y resuelvan.

a. Escriban la ecuación de la función graficada en cada caso.





b. Completen y luego calculen la integral de la región sombreada en cada caso.

$\int_a^b f(x)\,.\,dx = \int$ ☐ ☐ $dx =$ _____

$\int_a^b g(x)\,.\,dx = \int$ ☐ ☐ $dx =$ _____

43. Cálculo de áreas

▶ SABERES DINÁMICOS

Si una función f(x) es continua y positiva en un intervalo [a; b], el **área A** de la región del plano, limitada por la curva representativa de f(x) en el intervalo considerado y el eje de abscisas, es la integral definida de f(x) entre $x_1 = a$ y $x_2 = b$.

Para recordar pág. 149

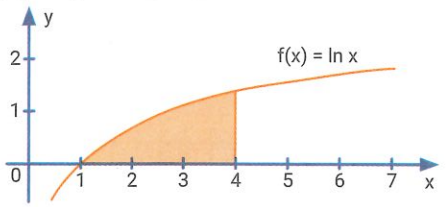
$\int_a^b f(x) \, . \, dx = A \rightarrow$ Área de la región comprendida entre la gráfica de f(x) y el eje x en [a; b].

$f(x) = \ln x \wedge x \in [1; 4]$

$A = \int_1^4 \ln x \, . \, dx =$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \, . \, dx \wedge dx =$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

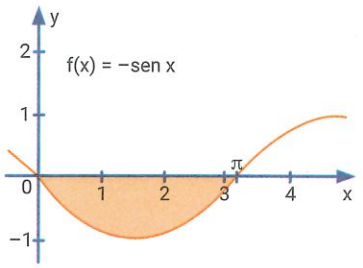


$A = \int_1^4 \ln x \, . \, dx = (\ln x \, . \, x)\Big|_1^4 - \int_1^4 x \, . \, \frac{1}{x} \, . \, dx = (\ln x \, . \, x - x)\Big|_1^4 = 4 \, . \, \ln 4 - 4 - \ln 1 + 1 = \mathbf{4 \, . \, \ln 4 - 3}$

El área que determina la curva de una función que es negativa en un intervalo [a; b] es el valor opuesto a la integral definida en dicho intervalo.

$f(x) = -\text{sen } x \wedge x \in [0; \pi]$

$A = \int_0^\pi -(-\text{sen } x) \, . \, dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = \mathbf{2}$



Si una función cambia de signo en el intervalo [a; b], el área de la función en dicho intervalo se calcula mediante la suma de dos integrales definidas respecto al cambio de signo.

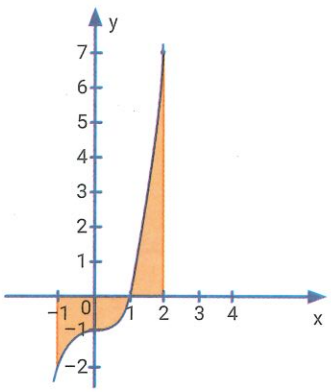
$a < x_1 < b \wedge \begin{cases} f(x) \leq 0 \leftrightarrow x \in [a; x_1] \rightarrow A = \int_a^{x_1} [-f(x)] \, . \, dx + \int_{x_1}^b f(x) \, . \, dx \\ f(x) \geq 0 \leftrightarrow x \in [x_1; b] \end{cases}$

$f(x) = x^3 - 1 \wedge x \in [-1; 2]$

$A = \int_{-1}^1 -(x^3 - 1) \, . \, dx + \int_1^2 (x^3 - 1) \, . \, dx$

$A = \left(-\frac{x^4}{4} + x\right)\Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big|_1^2 =$

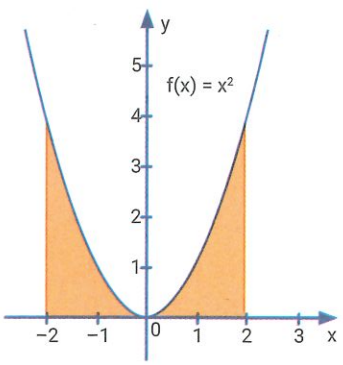
$A = \left(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + 1\right) + \left(4 - 2 - \frac{1}{4} + 1\right) = \mathbf{4{,}75}$



Si una función determina dos áreas iguales, el área total es el doble de cualquiera de ellas.

$f(x) = x^2 \wedge x \in [-2; 2]$

$A = 2\int_{-2}^0 x^2 \, . \, dx = 2\int_0^2 x^2 \, . \, dx = 2 \, . \, \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \mathbf{\frac{16}{3}}$



ACTIVIDADES

43. Cálculo de áreas

Test de comprensión

16. Respondan y expliquen las respuestas.

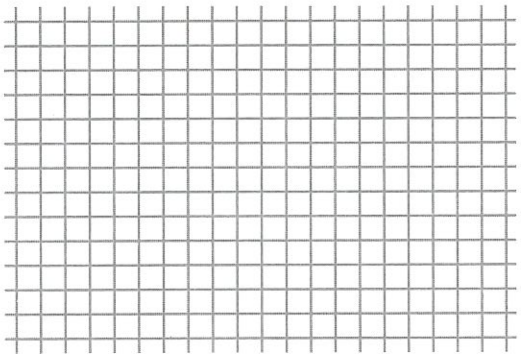
a. El área de una región ¿puede ser menor que 0?

b. $\int_{a+1}^{1} f(x) \, . \, dx + \int_{1}^{3} f(x) \, . \, dx = \int_{-2}^{1} f(x) \, . \, dx$, entonces ¿a = −2?

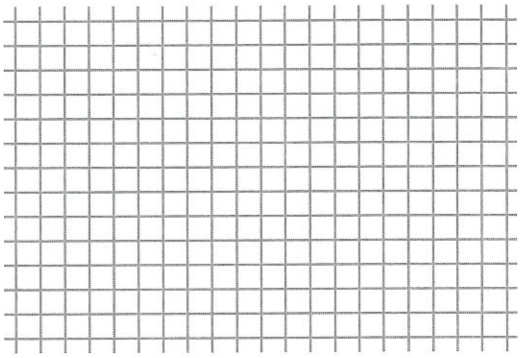
c. $\int_{1}^{3} 3 \, . \, dx$ ¿es igual a 3 . 2?

17. Grafiquen y calculen el área indicada en cada caso.

a. $\int_{-2}^{2} |x| \, . \, dx =$ _____

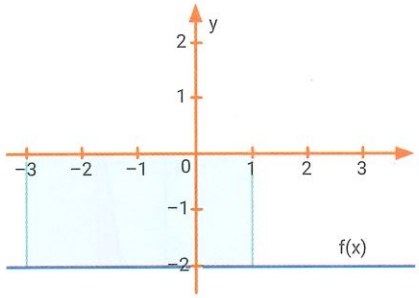


b. $\int_{0}^{3} \frac{1}{x+1} \, . \, dx =$ _____



18. Completen y calculen el área sombreada en cada una de las siguientes regiones.

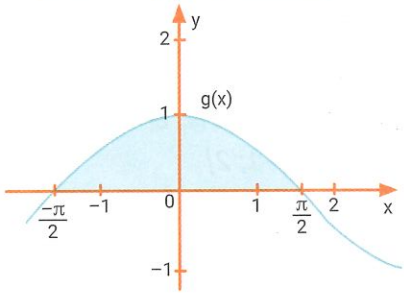
a. f(x) = ☐ ∧ x ∈ ☐



Área = _____

_____

b. g(x) = ☐ ∧ x ∈ ☐

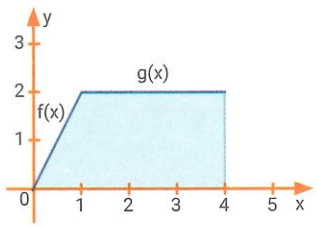


Área = _____

_____

DinámicaMente

Calculen el área sombreada. Verifiquen aplicando la fórmula del área del trapecio.



Para recordar pág. 149

_____

_____

Integración final

19. Calculen las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x} + e^x\right) . dx =$

b. $\int \frac{1 + x}{x} . dx =$

c. $\int (x + 1) . x^3 . dx =$

d. $\int \sqrt{x^3} . dx =$

e. $\int \frac{\cos(\ln|x + 3|)}{x + 3} . dx =$

f. $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} . dx =$

g. $\int (x + 3) . e^x . dx =$

h. $\int \ln^2 x . dx =$

i. $\int x . (2 + x^2)^{\frac{1}{2}} . dx =$

j. $\int e^{3x} . \cos(2x) . dx =$

k. $\int x^{-1} . \ln x . dx =$

l. $\int (2x + 1)^{-1} . \ln(2x + 1) . dx =$

20. Hallen la función f(x) en cada caso.

a. $f'(x) = \frac{5}{x - 2} - 6x^2 \wedge f(3) = 100$

b. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x + 1}} \wedge f(0) = -\frac{1}{3}$

c. $f'(x) = 2\,tg\,x \wedge f(0) = 1$

d. $f'(x) = x . e^{2x} \wedge f(1) = \frac{5}{4} e^2$

e. $f'(x) = 5x^2 + \cos x \wedge f(0) = 3$

f. $f'(x) = \frac{6}{5} x . \cos(x^2) \wedge f(0) = 4$

g. $f'(x) = \ln(5x) \wedge f\left(\frac{1}{5}\right) = 2$

h. $f'(x) = x^3 . e^{-x} \wedge f(0) = 3$

i. $f'(x) = \sqrt{x} . \ln x \wedge f(1) = -2$

21. Completen para obtener la igualdad.

a. $\int (2x + \square) . dx = \square + \text{sen}\,x + C$

b. $\int (\square - e^{2x}) . dx = \ln|x| - \square + C$

c. $\int \square . dx = 2 . \ln|x + 5| + \square$

22. Calculen la integral definida de cada una de las siguientes funciones.

a. $\int_{-1}^{3} (x^3 - 1) . dx =$

b. $\int_{0}^{e-1} \frac{dx}{x + 1} =$

c. $\int_{-1}^{1} e^x (x + 1)^2 . dx =$

d. $\int_{0}^{\pi} (x - 1) \cos x . dx =$

e. $\int_{-1}^{3} (2x)^3 . dx =$

f. $\int_{1}^{e} \ln x . dx =$

g. $f(x) = \text{cotg}\,x \wedge x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$

h. $f(x) = e^{2x} - e^{-2x} \wedge x \in [0; 1]$

i. $f(x) = \cos x - 1 \wedge x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

j. $f(x) = \cos(2x) \wedge x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

23. Calculen el valor de "a" en cada caso.

a. $\int_{1}^{e} a \ln(x) . dx = 2$

b. $\int_{1}^{a} (x + 1)^2 . dx = \frac{19}{3}$

c. $\int_{1}^{a} \frac{4}{x^2} . dx = \frac{16}{5}$

d. $\int_{0}^{4} (3\sqrt{x} + ax) . dx = 0$

24. Completen y resuelvan.

a. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x + 3} . dx = \int \frac{\square}{\square} \frac{1}{u} . dx$

b. $\int_{0}^{3} e^{2x+1} . dx = \int \frac{\square}{\square} e^u \square$

c. $\int \square\, 2 . \text{sen}(x + \pi) . dx = 2 \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\,u . du$

25. Tengan en cuenta los datos y resuelvan.

$\int_a^b f(x)\,dx = 2; \int_a^b g(x)\,dx = -1$

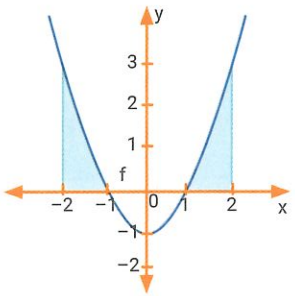
a. $\int_a^b [f(x) + g(x)] . dx =$

b. $\int_a^b [f(x) - g(x)] . dx =$

c. $\int_b^a [f(x) + g(x)] . dx =$

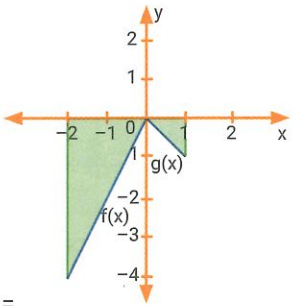
26. Expresen cada área de las regiones sombreadas utilizando integrales definidas.

a.



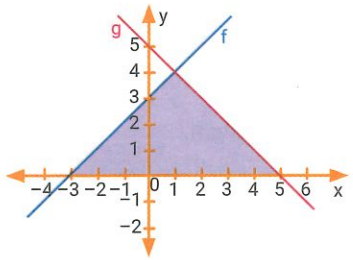
f(x) =
Área =

b.



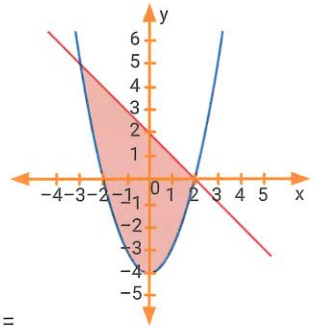
f(x) =
g(x) =
Área =

c.



f(x) =
g(x) =
Área =

d.



f(x) =
g(x) =
Área =

27. Grafiquen y calculen el área de la región solicitada en cada caso.

a. $f(x) = -x^2 + 2x + 3 \wedge$ eje x $(y = 0)$

b. $f(x) = \frac{1}{x} \wedge x \in [0{,}5; 2]$

c. $f(x) = x(x + 3).(x - 1) \wedge x \in [-3; 1]$

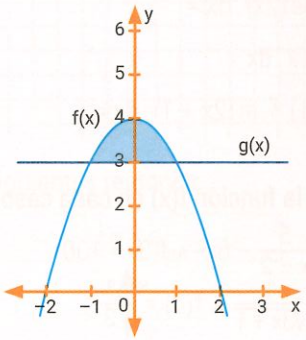
d. $f(x) = -x + 4$; $g(x) = -x.(x - 4) \wedge x \in [0; 5]$

e. $f(x) = e^x$; $g(x) = e^{-x} \wedge x \in [-1; 1]$

f. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$; $g(x) = x - 6 \wedge x = 0$

28. Reúnanse con un compañero y resuelvan.

a. Observen el gráfico y escriban la ecuación correspondiente a cada función.



b. Hallen los puntos de intersección entre f(x) y g(x).

c. Teniendo en cuenta que la integral definida calcula el área de la región comprendida entre la curva y el eje x, marquen con una X la respuesta correcta.

• ¿Cuál es la región comprendida entre las dos curvas?

$\int_{-2}^{2} [(-x^2 + 4) - 3].dx$ ☐

$\int_{-1}^{1} [(-x^2 + 4) - 3].dx$ ☐

$\int_{-2}^{2} [3 - (-x^2 + 4)].dx$ ☐

• ¿Cuál es el valor del área sombreada?

$\frac{4}{3}$ ☐

$\frac{2}{3}$ ☐

$\frac{1}{3}$ ☐

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

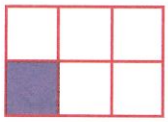
Relación pitagórica

Una de las relaciones trigonométricas más utilizadas es la pitagórica.

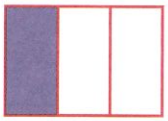
$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Concepto de área de una superficie

El área de una superficie es una **medida** que establece cuántas veces otra superficie tomada como unidad está contenida en la dada. Por lo tanto, el área depende de la unidad elegida.



Área del rectángulo: 6, tomando como unidad al



Área del rectángulo: 3, tomando como unidad al

Área del rectángulo: 2, tomando como unidad al

Algunas fórmulas para calcular el área de polígonos

Figura	Fórmula del área
Cuadrado	l^2
Rectángulo	$b \cdot h$
Triángulo	$\frac{b \cdot h}{2}$
Trapecio	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$

Para calcular las áreas de recintos planos, delimitados por curvas y rectas, se puede utilizar la integral definida.

7 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

29. ¿Cuál es el valor de "a" para que $\int_a^6 \sqrt{x-2}\,.\,dx = \frac{16}{3}$?

○ 0 ○ 1 ○ 2

30. Dada $\int_0^2 (5x+3)^3\,.\,dx$, si se toma $u = 5x + 3$, ¿cuál es la integral que se debe aplicar?

○ $\int_0^2 u^3\,.\,du$ ○ $\int_3^{13} u^3\,.\,du$ ○ $\frac{1}{5}\int_3^{13} u^3\,.\,du$

31. Respondan.

a. ¿A qué es igual $\int \operatorname{sen} x\,.\,\ln|\cos x|\,.\,dx$?

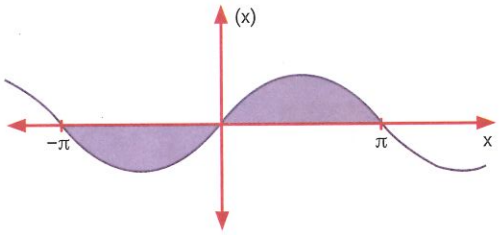
○ $\cos x\,.\,(-\ln|\cos x| + 1) + C$ ○ $\operatorname{sen} x\,.\,(-\ln|\cos x| + 1) + C$ ○ $\cos x\,(-\ln|\operatorname{sen} x| + 1) + C$

b. ¿Cuál es el valor de C para que $\int \operatorname{sen} x\,.\,\ln|\cos x|\,.\,dx = 3$ para $x = 0$?

○ 4 ○ 2 ○ 3

32. Observen el siguiente gráfico y respondan.

a. ¿Cuál es la función graficada?



○ $f(x) = \cos x$ ○ $f(x) = \operatorname{sen} x$ ○ $f(x) = -\cos x$

b. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

○ 0 ○ 2 ○ 4

8 Probabilidad y estadística

44. Variables aleatorias

▶ SABERES DINÁMICOS

El **espacio muestral** (Ω) es el conjunto de todos los resultados posibles asociados a un experimento aleatorio.

El espacio muestral Ω, asociado al experimento de arrojar dos monedas es:
Ω = {(c; c), (c; s), (s; c), (s; s)}, donde c = cara; s = ceca.

Una **variable aleatoria v(x)** es una función que a cada elemento del espacio muestral de un experimento le asigna un número real.
En el ejemplo anterior se puede asignar a cada par ordenado el número de caras obtenidas al arrojar las dos monedas.

(c; c) ⇒ 2; (c; s) ⇒ 1; (s; c) ⇒ 1; (s; s) ⇒ 0

El **recorrido** de una variable aleatoria v(x), que llamaremos **Rv**, es el conjunto de valores que ella toma; dicho de otro modo, es la **imagen de la función v(x)**.

Rv = {0; 1; 2}

Tipos de variables aleatorias

Para **variables cuantitativas** las variables aleatorias se clasifican en:
- **Variable aleatoria discreta**: su recorrido es un conjunto **finito o numerable**.

La variable del ejemplo anterior y las variables cantidad de hijos, cantidad de habitaciones, etc. son discretas.
- **Variable aleatoria continua**: su recorrido es un intervalo o la unión de intervalos de números (reales).

La estatura, el peso, la temperatura, etc. son continuas.

La **función de probabilidad p(r)** de la variable aleatoria discreta v(x) es una función que, a cada elemento r del recorrido Rv, le asigna su probabilidad.

x es igual a r ⇒ p(r) = P(x = r)

Para recordar pág. 173

En el ejemplo de tirar dos monedas y ver la cantidad de caras que se obtienen, para conocer la probabilidad de que no salga ninguna cara se escribe: P(x = 0) o P(0).

***P(0) = $\frac{1}{4}$** porque hay 1 suceso favorable [(s; s)] de los 4 sucesos posibles.*
*La probabilidad de que salga una sola cara es: **P(1) = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$**.*

x	0	1	2
P(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

TIP

∑ significa sumatoria.

Si P(x) es función de probabilidad, entonces: $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ \sum_{i}^{n} P(x_i) = 1 \end{cases}$

∑ permite representar sumas de varios sumandos: $\sum_{i}^{n} p(x_i) = p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + \ldots + p(x_i)$.

ACTIVIDADES

44. Variables aleatorias

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que el espacio muestral asociado al experimento de arrojar dos dados tiene 12 elementos?

b. Si v(x): producto de los puntos obtenidos al arrojar dos dados, entonces ¿$P(12) = \frac{1}{9}$?

c. Siendo Rv = {0, 1, 2, 3, 4}; P(0) = 0,3; P(1) = 0,25; P(2) = 0,25; P(3) = 0,1; P(4) = 0,1, ¿es cierto que p(r) es una función de probabilidad?

2. Indiquen el espacio muestral de los siguientes sucesos.

a. Elegir al azar un número múltiplo de 4, mayor que 0 y menor que 27.

b. Arrojar simultáneamente tres monedas (c: cara; s: ceca).

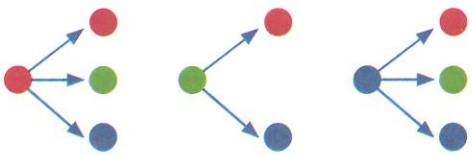
c. Arrojar simultáneamente una moneda y un dado.

d. Elegir al azar un número de dos dígitos iguales y distintos de 0.

e. Elegir al azar un número natural menor que 15 y mayor o igual que 8.

f. Ordenar al azar las letras de la palabra OSO.

3. Observen el siguiente diagrama de árbol y resuelvan.



a. Indiquen el espacio muestral asociado a elegir dos bolitas.

b. Completen la tabla, sabiendo que: v(x) = cantidad de rojos.

x	0	1	2
P(x)			

c. Comprueben que P(x) es una función de probabilidad.

4. Clasifiquen las siguientes variables en discretas o continuas.

a. El peso de los socios de un club.

b. Cantidad de mascotas por hogar.

c. Número de páginas de un libro.

d. Tiempo que tarda en llenarse una pileta.

45. Parámetros de posición y dispersión

▶ SABERES DINÁMICOS

Parámetros de tendencia central

Variable aleatoria discreta

- **Media aritmética**: es el cociente entre la suma de los productos resultantes de multiplicar cada valor de la variable por su correspondiente frecuencia absoluta y el total de observaciones.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{n}$$

- **Mediana**: teniendo los datos ordenados de menor a mayor, es el valor de la variable que ocupa la posición central o el promedio de los dos datos centrales.
- **Moda**: es el valor de la variable con mayor frecuencia absoluta.

Datos agrupados en intervalos de clase

- **Media aritmética**: se elige un representante de cada intervalo. Dicho representante será el punto medio del intervalo llamado **marca de clase** (x_n).

$$x_n = \frac{\text{lim inferior} + \text{lim superior}}{2}; \bar{x} = \frac{\sum x_n \cdot f}{n}$$

- **Cálculo de la mediana**:

$$m_e = A + \frac{\frac{n}{2} - B}{C} \cdot D$$

A: límite inferior del intervalo que contiene la mediana.
B: frecuencia acumulada del intervalo que antecede al que contiene la mediana.
C: frecuencia absoluta del intervalo que contiene la mediana.
D: amplitud del intervalo.

- **Intervalo modal**: intervalo de clase con mayor frecuencia.

La siguiente distribución de frecuencias representa las edades de los alumnos de un colegio vespertino.

x	x_n	f	F(a)	$x_n \cdot f$
[12; 15)	13,5	70	70	945
[15; 18)	16,5	55	125	907,5
[18; 21)	19,5	21	146	409,5

$$\bar{x} = \frac{945 + 907{,}5 + 409{,}5}{146} \cong 15{,}5$$

$$m_e = 15 + \frac{\frac{146}{2} - 70}{55} \cdot 3 \cong 15{,}2$$

$$m_o = [12; 15)$$

Parámetros de dispersión

Varianza: $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}$

Desviación estándar: mide la dispersión de los datos respecto a la media.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}}$$

Coeficiente de variación: expresa la desviación estándar como un porcentaje de la media aritmética. Cuando el coeficiente de variación es inferior al 30%, la distribución es bastante homogénea.

$$Cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 \Rightarrow Cv = \frac{\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}}}{\bar{x}} \cdot 100$$

La media de las notas obtenidas en las evaluaciones de los estudiantes de A y de B es de 4, pero las notas de "B" son más cercanas entre sí.

x: notas de "A"	$(x - \bar{x})^2$	x: notas de "B"	$(x - \bar{x})^2$
1	9	3	1
4	0	4	0
7	9	5	1
$\sigma_A = \sqrt{\frac{9+0+9}{3}} = 2{,}45$		$\sigma_B = \sqrt{\frac{1+0+1}{3}} = 0{,}81$	
$Cv = 61{,}25\%$		$Cv = 20{,}25\%$	

Como $\sigma_A > \sigma_B$, entonces "A" es más disperso que "B".

A medida que Cv disminuye, los datos están más concentrados alrededor de la media.

ACTIVIDADES

45. Parámetros de posición y dispersión

Test de comprensión

5. Respondan y expliquen las respuestas.

a. La desviación estándar, ¿nunca puede ser 0?

b. La media, la moda y la mediana, ¿pueden coincidir?

c. Si Cv = 15% y $\bar{x} = 2$, ¿la desviación estándar es 0,3?

6. Lean atentamente y respondan.

Se realizó una encuesta a un grupo de personas elegidas al azar acerca de la cantidad de integrantes de su hogar.

a. Completen la siguiente tabla.

x: número de integrantes del hogar	f	x . f	F
1	15		
2	25		
3	30		
4	10		
5	5		
Suma			

b. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

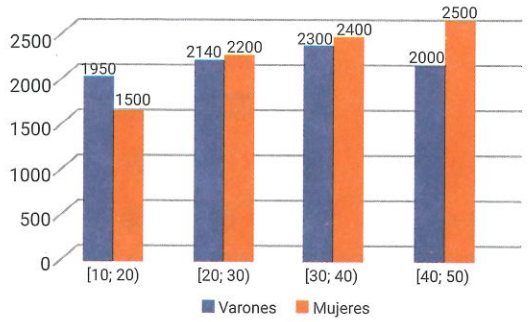
c. Calculen el promedio de integrantes por hogar.

d. Calculen el valor de la mediana.

e. ¿Cuál fue la respuesta más frecuente? ¿Qué parámetro de posición la representa?

7. Observen el gráfico y resuelvan.

El siguiente gráfico muestra la estructura de la población de entre 10 y 50 años de edad de una localidad.



a. Completen la tabla.

Edad	x_n	Varones	Mujeres
[10; 20)	15	1 950	1 500

b. Calculen el coeficiente de variación de cada serie e indiquen cuál es más homogénea.

46. Correlación lineal entre variables aleatorias. Recta de regresión

▶ SABERES DINÁMICOS

Correlación lineal entre variables aleatorias

Para analizar si existe **correlación lineal** o no entre dos variables **x** e **y**, se puede hallar el **coeficiente de correlación**. Esto permite hacer predicciones según el comportamiento de las variables.

Coeficiente de correlación: coeficiente de Pearson

El **coeficiente de correlación (r)** es un número que se calcula a través de la siguiente fórmula:

$$r = \frac{\frac{\Sigma x_i \cdot y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \wedge r \in [-1; 1]$$

$r = 1 \Rightarrow$ existe una correlación positiva perfecta.
$0 < r < 1 \Rightarrow$ existe una correlación positiva.
$r = 0 \Rightarrow$ no existe relación lineal.
$-1 < r < 0 \Rightarrow$ existe una correlación negativa.
$r = -1 \Rightarrow$ existe una correlación negativa perfecta.

Se quiere conocer si existe alguna relación entre la distancia de reacción de un conductor y la cantidad de alcohol que haya consumido.

Velocidad (km/h)	x: distancia de reacción sin alcohol (m)	$(x - \bar{x})^2$	y: distancia de reacción con alcohol (m)	$(y - \bar{y})^2$	x . y
50	14	$(14 - 25)^2 = 121$	21	$(21 - 37{,}33)^2 = 266{,}67$	294
90	25	$(25 - 25)^2 = 0$	37	$(37 - 37{,}33)^2 = 0{,}11$	925
130	36	$(36 - 25)^2 = 121$	54	$(54 - 37{,}33)^2 = 277{,}89$	1 944
Sumas	75	242	112	544,67	3 163

Fuente: https://www3.gobiernodecanarias.org/sanidad/scs/content/391ff144-94ee-11e5-99aa-57b507243371/alcohol.pdf

Para una velocidad media de 90 km/h...

... la media aritmética de cada variable es: $\bar{x} = \frac{75}{3} = 25\ m \wedge \bar{y} = \frac{112}{3} \cong$ ***37,33 m***

... la desviación estándar es: $\sigma_x = \sqrt{\frac{242}{3}} \cong 8{,}98 \wedge \sigma_y = \sqrt{\frac{544{,}67}{3}} \cong$ ***13,47***

El coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \Rightarrow r = \frac{\frac{3163}{3} - 25 \cdot 37{,}33}{8{,}98 \cdot 13{,}47} \cong 1{,}001 \Rightarrow$$ ***r ≅ 1, existe una correlación positiva perfecta.***

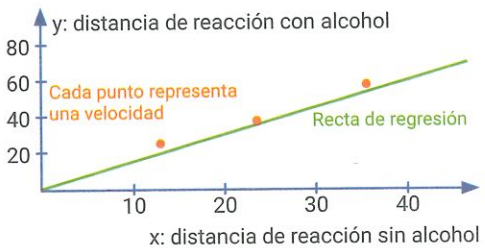
Recta de regresión

La ecuación de la recta que mejor se ajusta al diagrama es:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x}) \Rightarrow y - 37{,}33 = \frac{121{,}08}{8{,}98^2} \cdot (x - 25) \Rightarrow \mathbf{y = 1{,}5x - 0{,}17}$$

Si la distancia de reacción sin alcohol es de 36 m, bajo el supuesto de correlación lineal, se puede averiguar cuál será la distancia de reacción con alcohol, reemplazando en la ecuación.

$y = 1{,}5 \cdot 36 - 0{,}17 =$ ***53,83 m***



46. Correlación lineal entre variables aleatorias. Recta de regresión

Test de comprensión

8. Respondan y expliquen las respuestas.

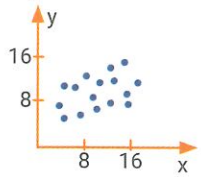
a. Si el coeficiente de correlación entre dos variables es 0,5, ¿existe la correlación? ¿De qué tipo es?

b. La pendiente de la recta de regresión ¿puede ser negativa?

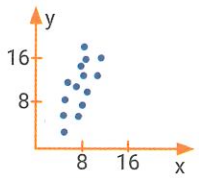
c. Si la ecuación de una recta de regresión es $y - 1 = 0{,}5\,x - 2$, ¿$\overline{x} = 2$?

9. Observen atentamente los gráficos y escriban la letra de la recta de regresión correspondiente.

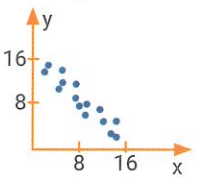
a. $y = -x + 16$



b. $y = 2x - 12$



c. $y = 0{,}5x + 5$



10. Lean atentamente y resuelvan.

La siguiente tabla indica el número de bacterias por unidad de volumen presentes en un cultivo después de una cierta cantidad de horas.

a. Completen la tabla.

x: número de horas	y: número de bacterias	$(x - \overline{x})^2$	$(y - \overline{y})^2$	x . y
0	12			
1	19			
2	24			
3	30			
4	37			

b. Calculen el coeficiente de correlación.

c. Escriban, si es posible, la ecuación de la recta de regresión.

d. Si el número de horas transcurridas es de 8, ¿cuál es el número esperado de bacterias?

e. Escriban la ecuación de la recta de regresión en función de y.

f. Si el número esperado de bacterias es aproximadamente 105, ¿cuántas horas transcurrieron? Piensen en la ecuación de la recta de regresión en función de y.

47. Lectura, análisis e interpretación de gráficos de dispersión

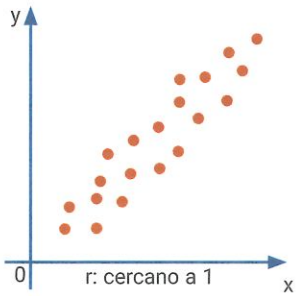
▶ SABERES DINÁMICOS

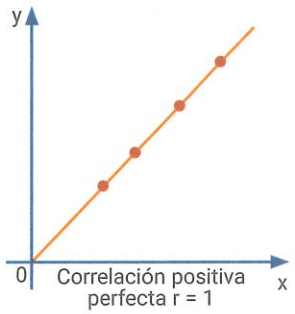
Los **diagramas de dispersión** se utilizan para determinar si existe correlación, es decir, una relación funcional entre los elementos de las dos variables.

De acuerdo a cómo se distribuyen los puntos, puede suceder:

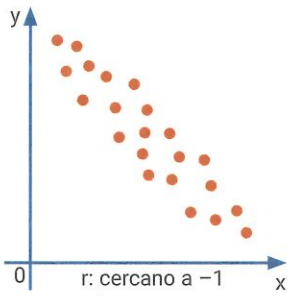
a. Los puntos se ajustan a una recta: la **correlación es lineal**.

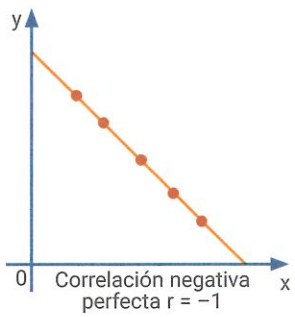
- **Lineal positiva**: los valores de **y** se incrementan linealmente a medida que crece **x**.



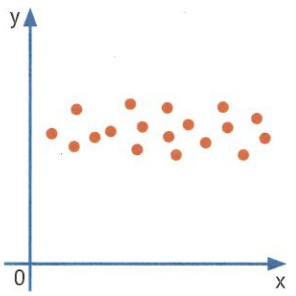


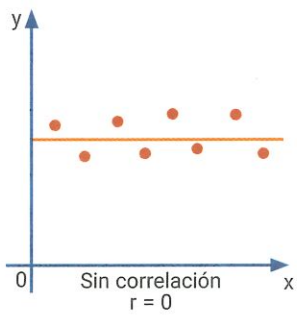
- **Lineal negativa**: los valores de **y** decrecen linealmente a medida que crece **x**.



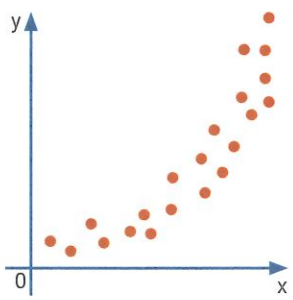


- **Sin correlación**:





b. Los puntos se ajustan a una curva: la **correlación es curvilínea**.



47. Lectura, análisis e interpretación de gráficos de dispersión

Test de comprensión

11. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Toda correlación entre dos variables ¿es siempre lineal?

b. Si $\sigma_x = 0{,}5 \wedge y = 3x - 2$, ¿es cierto que $\sigma_{xy} = 0{,}75$?

c. Si $y - 3x = -2x + 2$, ¿la correlación es negativa?

12. **Observen la siguiente tabla. Luego, resuelvan y marquen con una X la respuesta correcta.**

x	y
3	4
5	6
6	6
7	9
8	7

a. ¿Cuál es el coeficiente de correlación entre ambas variables?

- 0,81 ☐
- 0,51 ☐
- 0,61 ☐

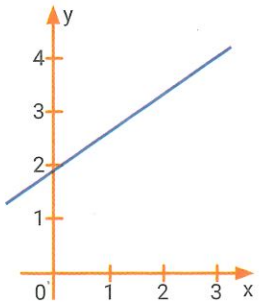
b. ¿Cómo es la correlación?

- Lineal positiva. ☐
- Lineal negativa. ☐
- No lineal. ☐

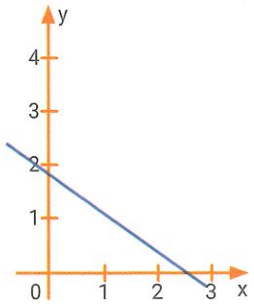
c. ¿Cuál es la ecuación de la recta de regresión?

- $y = x + 1{,}9$ ☐
- $y = 0{,}77\,x + 1{,}9$ ☐
- $y = -0{,}77\,x + 1{,}9$ ☐

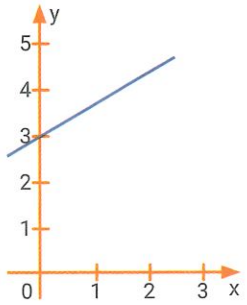
d. ¿Cuál es el gráfico correspondiente a la recta?



☐



☐



☐

13. Clasifiquen las variables en discreta o continua.

a. Cantidad de socios de un club.

b. Cantidad de goles obtenidos por Argentina en el último mundial de fútbol.

c. La velocidad del viento.

d. Tiempo de duración de un espectáculo.

e. Cantidad de habitaciones en un hogar.

f. Cantidad de milímetros de agua caídos en las últimas lluvias.

14. Resuelvan.

a. Escriban el espacio muestral asociado a la posición de tres llaves térmicas [0 (apagado); 1 (encendido)] en un tablero eléctrico.

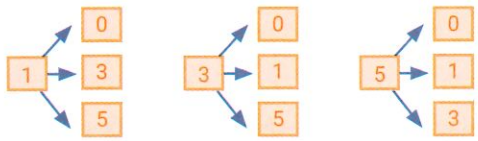
b. Completen la tabla correspondiente a la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria v(x): cantidad de llaves apagadas en el tablero.

x	0	1	2	3
P(x)				

c. Escriban el recorrido de la variable aleatoria.

d. Calculen la probabilidad de que, como máximo, dos llaves estén encendidas.

15. Observen el siguiente diagrama de árbol y respondan.



a. Escriban el espacio muestral.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas componentes sean múltiplos de 5?

c. Completen la tabla correspondiente a la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria v(x): cantidad de componentes múltiplos de 5.

x	0	1	2
P(x)			

d. Calculen P(x > 0).

16. Calculen P(a), sabiendo que P(x) es función de probabilidad, Rv = {a, b, c} y P(b) + P(c) = 0,65.

17. Lean atentamente y resuelvan.

Se arrojó un dado 20 veces. Se registró la cantidad de veces que salió cada número y se obtuvieron los siguientes resultados:

4; 6; 2; 6; 1; 6 ; 5; 5; 2; 6; 3; 2; 3; 1; 6; 4; 5; 6; 6; 4

a. Completen la tabla.

x: número	1	2	3	4	5	6
f						
F						

b. Calculen la media, la mediana y la moda.

c. Calculen el coeficiente de variación.

d. Indiquen si la distribución es bastante homogénea.

18. Observen la siguiente tabla y calculen el valor de k, sabiendo que la media es 2,5.

x	f
1	5
2	2
3	k
4	4

19. Lean atentamente y resuelvan.

En una caja hay arandelas de distinto espesor.

x: espesor en mm	f
[1; 2)	10
[2; 3)	12
[3; 4)	15
[4; 5)	13

a. ¿Cuántas arandelas contiene la caja?

b. Indiquen el valor de la mediana.

c. ¿A qué intervalo pertenece la moda?

d. Realicen un histograma.

20. Calculen lo pedido sabiendo que la ecuación de la recta de regresión es $y - 1 = 3x - 2$.

a. $\overline{x}$ =

b. $\overline{y}$ =

c. La correlación ¿es positiva o negativa?

21. Reúnanse con un compañero y hallen el valor de "a" según lo pedido en cada caso.

a. Que $y = (-2a - 3)x + 5$ no corresponda a una recta de correlación.

b. Que $y - 1 = 2x - a$ tenga a $\overline{x} = 5$.

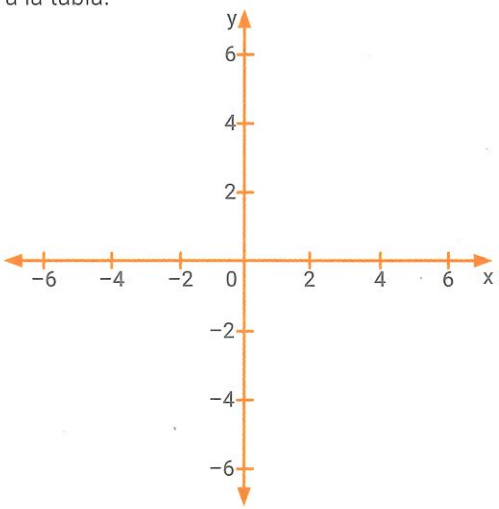
c. Que $y - (-3a + 1) = 3(x - 5)$ tenga a $\overline{y} = 7$.

22. Observen la siguiente tabla y realicen lo pedido en cada caso.

x	y
1	6
2	3
3	2
4	0
5	−3

a. Hallen la ecuación de la recta de regresión.

b. Grafiquen en el sistema de ejes el diagrama de dispersión y la recta de regresión correspondiente a la tabla.



23. Lean atentamente y resuelvan.
La siguiente tabla relaciona el diámetro interno de una tubería hidráulica y la velocidad de circulación del agua.

x: diámetro interno de la tubería (m)	v: velocidad de circulación del agua (m/s)
1,04	0,85
1,32	0,93
1,51	0,97
1,89	1,06
2,12	1,11
2,36	1,16

Fuente: https://molecor.com/es/calculos-hidraulicos-diseno-redes

a. Calculen el coeficiente de correlación.

b. Indiquen qué tipo de correlación vincula ambas variables.

c. Hallen la ecuación de la recta de regresión V, en función de x. Aproximen a los centésimos.

d. ¿Cuál es la velocidad de circulación esperable para un diámetro de 400 cm?

e. Hallen la ecuación de la recta de regresión de x, en función de v.

f. Si la velocidad de circulación del agua es de 1,2 m/s, ¿cuál es el diámetro interno esperado de la tubería?

24. Resuelvan sabiendo que el coeficiente de correlación entre dos variables es $2 \cdot (a + 3)$.

a. Hallen los posibles valores de "a" para que la correlación sea positiva perfecta.

b. Hallen los posibles valores de "a" para que la correlación sea negativa perfecta.

48. Distribuciones continuas

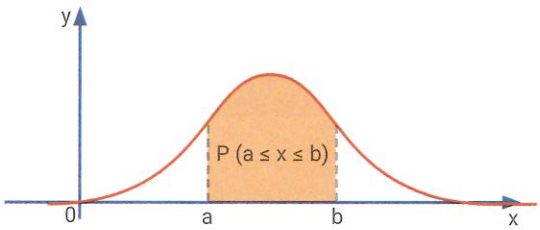
▶ SABERES DINÁMICOS

En el caso de que la variable aleatoria sea continua, no se puede calcular la probabilidad exacta de ningún valor particular; solo se puede determinar la probabilidad de que un valor de la variable pertenezca a un intervalo determinado.

Toda variable aleatoria continua **x** tiene una curva asociada a ella llamada **función de densidad de probabilidad** de la variable o **función de densidad**. La probabilidad de que **x** tome un valor comprendido entre **a** y **b** es igual al área bajo la curva en ese intervalo.

Propiedades de la función de densidad

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$



El tiempo de espera máximo para hacer una consulta telefónica es de 5 minutos, pasado ese tiempo hay que volver a llamar.

Se define la variable aleatoria x: tiempo de espera en minutos.

***a.** ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera sea exactamente de 2,25 minutos?*

P(x = 2,25) = 0, ya que es prácticamente imposible medir ese tiempo con precisión.

***b.** ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera sea menor de 3 minutos?*

Se calcula $P(0 < x < 3)$.

Se define $f: [0; 5] \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{3}{125} x^2$

Se verifica que es una función de densidad:

***1.** $f(x) \geq 0, x \in [0; 5] \Rightarrow \frac{3}{125} x^2 \geq 0$*

***2.** $\int_0^5 \frac{3}{125} x^2\,dx = \frac{x^3}{125}\Big|_0^5 = 1$*

***3.** $P(0 < x < 3) = \frac{x^3}{125}\Big|_0^3 = \frac{27}{125} = 0{,}216$*

Por lo tanto, f(x) es una función de densidad.

La probabilidad de esperar menos de 3 minutos es: 0,216.

Dinámica TConecta

Ingresen a puerto.pub/fcdensi * para mirar un video acerca de la función de densidad.

* Enlace acortado de https://es.khanacademy.org/math/statistics-probability/random-variables-stats-library/random-variables-continuous/v/probability-density-functions

ACTIVIDADES

48. Distribuciones continuas

Test de comprensión

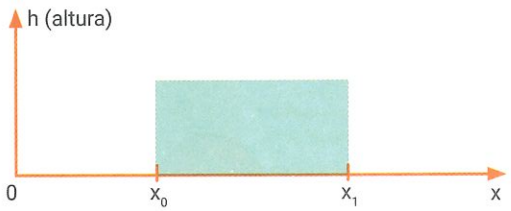
25. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Si f: $[0; 30] \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \frac{1}{450}x$, ¿f(x) es una función de densidad?

b. Si $x \in [1; 5]$, ¿$P(x = 2{,}4) = 0$?

c. ¿Es cierto que $P(a < x < b) \neq P(a \leq x \leq b)$?

26. Observen la siguiente gráfica, sabiendo que corresponde a una función de densidad y respondan.



a. ¿Qué característica presenta la variable aleatoria en $[x_0; x_1]$?

b. Calculen el área del rectángulo sombreado.

c. Dado $x_0 = 2$ y $x_1 = 5$:

- ¿Cuál es el valor de la altura del rectángulo?
- Completen para que f(x) sea una función de densidad. $f(x) =$ ___ entre [2; 5]
- Calculen $P(3 < x < 5)$
- Calculen $P(x_0 < x < x_1)$
- ¿Cuál es el valor de $P\left(x < \frac{x_0 + x_1}{2}\right)$?

27. Hallen el valor de "a" para que y = ax − 1 sea una función de densidad en [1; 5].

28. Tengan en cuenta la función $f(x) = \text{sen } x$; $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ y resuelvan.

a. Demuestren que es una función de densidad.

b. Calculen $P\left(x > \frac{\pi}{4}\right)$.

c. Calculen $P\left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right)$.

49. Distribución normal. Esperanza matemática

▶ SABERES DINÁMICOS

Esperanza o media aritmética de la variable aleatoria continua

Corresponde al valor medio de los posibles valores que pueda tomar la variable aleatoria.

$E(x) = \mu = \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$, siendo f(x) la función de densidad definida en [a; b].

Para variables aleatorias discretas, se define: $\overline{x} = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$, siendo P(x) la función de probabilidad.

La longitud de ciertos tornillos (en centímetros) es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$f(x) = \frac{3}{4}(-x^2 + 4x - 3)$ *si* $x \in [1; 3] \Rightarrow \int_1^3 x \cdot \frac{3}{4}(-x^2 + 4x - 3)\, dx = 2$

La longitud promedio de los tornillos es 2 cm.

Varianza de una variable aleatoria continua

La **varianza de una variable aleatoria continua X**, cuya función de densidad f(x) está definida en [a; b], se calcula de la siguiente manera: $v(x) = v = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)\, dx$

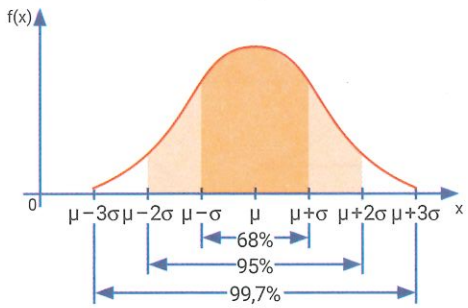
Desvío tipo o **estándar**: $\sigma = \sqrt{v}$

Distribución normal

Llamamos **variable aleatoria normal** a una variable aleatoria X con media aritmética μ y desvío estándar σ, cuya función de densidad es: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Para indicar que X es variable aleatoria normal, se simboliza: $X \sim N(\mu;\sigma)$.

La **distribución normal** tiene forma acampanada; la gráfica recibe el nombre de Campana de Gauss.



- Es simétrica respecto a la recta x = μ.
- Tiene máximo en $x_i = \mu$.
- Los valores μ − σ y μ + σ son las abscisas de los puntos de inflexión.
- El 68% de los valores pertenecen al intervalo (μ − σ; μ + σ).
- El 95% de los valores pertenecen al intervalo (μ − 2σ; μ + 2σ).
- El 99,7% de los valores pertenecen al intervalo (μ − 3σ; μ + 3σ).

El peso de los deportistas varones de un determinado club se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 kg y desviación estándar de 6 kg.
Se verifica que:

- el 68% del peso de los deportistas varones se encuentra entre 68 kg y 80 kg.
- el 95% del peso de los deportistas varones se encuentra entre 62 kg y 86 kg.
- el 99,7% del peso de los deportistas varones se encuentra entre 56 kg y 92 kg.

Áreas dinámicas [Matemática y Física]

La curva de Maxwell, dentro del campo de la física, indica cuántas partículas de gas se mueven a una velocidad determinada. Esta distribución muestra que la mayoría de las partículas se mueven a una velocidad alrededor del promedio, característica propia de la distribución normal.

ACTIVIDADES

49. Distribución normal. Esperanza matemática

Test de comprensión

29. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que μ corresponde al valor máximo de la Campana de Gauss?

b. La esperanza matemática ¿se calcula solo para una variable aleatoria discreta?

c. Si $\mu = 2$ y $\sigma = 0{,}5$, los valores comprendidos entre (1; 3) ¿representan el 68% de la muestra?

30. Lean atentamente y resuelvan.

La altura que alcanza un determinado tipo de árbol sigue una variable aleatoria con función de densidad: $f(x) = \frac{x}{12}$ y $x \in (1; 5)$.

a. Verifiquen que f es una función de densidad. _____

b. Calculen μ. _____

31. Marquen con una X la respuesta correcta.

a. Si $\mu = 0{,}2$ y $\sigma = 0{,}5$, el 68% de la muestra está comprendida entre:

- $(-0{,}3; 0{,}7)$ ☐
- $(0{,}3; 0{,}7)$ ☐
- $(-0{,}3; 0{,}5)$ ☐

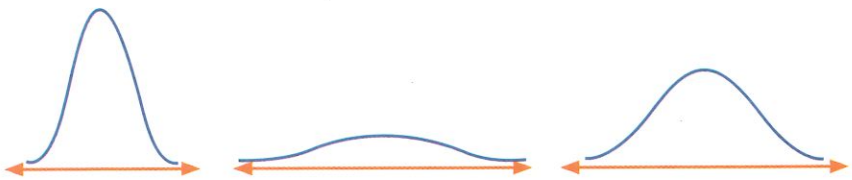
b. Si $f(x) = \frac{1}{5}$ y $x \in (5; a)$, el valor de "a" para que f sea una función de densidad es:

- 1 ☐
- 2 ☐
- 10 ☐

c. Si $f(x) = \frac{1}{16}x$ y $x \in (2; 6)$, entonces el valor de μ es:

- 4,33 ☐
- 5 ☐
- 5,33 ☐

d. La gráfica con mayor desviación estándar es (en todos los casos μ es la misma):



☐ ☐ ☐

32. Indiquen el valor de μ y σ correspondiente a la siguiente función de densidad de distribución normal.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

_____

_____

DinámicaMente

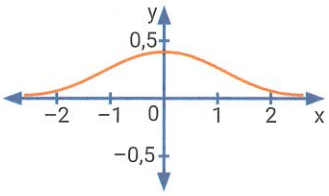
Un jugador lanza un dado. Si obtiene 1 o número primo, gana tantos puntos como 100 veces el valor que marca el dado; en caso contrario, pierde tantos puntos como 100 veces el valor que marca el dado. Calculen la esperanza matemática.

_____

50. Distribución normal estándar

▶ SABERES DINÁMICOS

Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, se denomina **variable aleatoria normal estándar** y se simboliza: $Z : N(0;1)$.



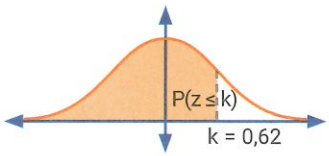
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2}$$

Toda **distribución normal N(μ;σ)** se puede estandarizar de la siguiente manera:

$$P(x < k) = P\left(z < \frac{k - \mu}{\sigma}\right)$$

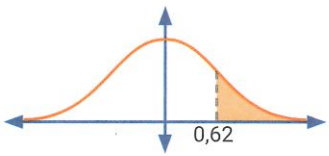
Las probabilidades asociadas a esta distribución se encuentran tabuladas para facilitar el cálculo.

¿Cómo se utiliza la tabla?

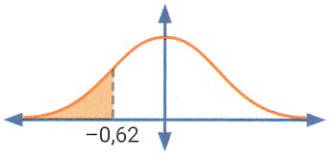


- $P(z \leq 0,62) = 0,7324$

z_i	0,00	0,01	0,02	0,03	...	0,09
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	...	0,7549

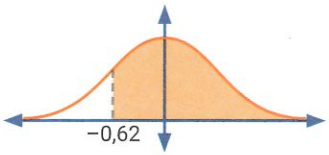


- $P(z \geq 0,62) = 1 - P(z \leq 0,62) = 1 - 0,7324 = 0,2676$



- $P(z \leq -0,62)$

  Como la curva es simétrica, la $P(z \leq -0,62) = P(z \geq 0,62) = 0,2676$



- $P(z \geq -0,62) = P(z \leq 0,62) = 0,7324$

- $P(0,55 \leq z \leq 1,23) = P(z \leq 1,23) - P(z \leq 0,55)$

  $= 0,8907 - 0,7088 = 0,1819$

Tabla de distribución normal estándar (acumulada) (la tabla completa está en página 175).

z_i	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...	0,09
0,5	0,6915	0,6959	0,6985	0,7019	0,754	0,7088	...	0,7224
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	...	0,9177

La temperatura promedio máxima estipulada durante el mes de septiembre en CABA es de 18 °C y la desviación estándar, de 2 °C.

¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura esté por debajo de los 15 °C?

$$P(x < 15) = P\left(\frac{15 - 18}{2}\right) = P(z < -1,5) = P(z > 1,5) = 1 - P(z < 1,5) = 1 - 0,9332 = \mathbf{0,0668}$$

ACTIVIDADES

50. Distribución normal estándar

Test de comprensión

33. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que $P(z \geq -1{,}15) = P(z \leq 1{,}15)$?

b. Si Z : N(0;1), la varianza ¿puede ser distinta de 1?

c. Si $P(x < 70) = P(z < 0{,}8)$ y $\sigma = 5$, ¿es cierto que $\mu = 66$?

34. Completen con el signo o número correspondiente en cada caso. Luego, calculen la probabilidad.

a. $1 - P(z < 0{,}5) = P(z \square 0{,}5) =$

b. $P(z < 1{,}25) - P(z < 0) = P(\square < z < \square) =$

c. $P(|z| < 1{,}5) = 2 \cdot P(\square < z < \square) =$

d. $P(z > -2) = P(z \square \square) =$

35. Calculen el valor de a en cada caso.

a. $P(z < a) = 0{,}7704$

b. $P(z > a) = 0{,}0668$

c. $P(0{,}5 < z < a) = 0{,}2417$

d. $P(z - 1 > a) = 0{,}30854$

36. Completen y calculen teniendo en cuenta la siguiente distribución normal: N(18;2,5).

a. $P(x < 16) = P(z < \square) = \square$

b. $P(x > 21) = P(z > \square) = \square$

c. $P(15 \leq x \leq 19) = P(\square \leq z \leq \square)$

d. $1 - P(x > 16) = P(z < \square) = \square$

37. Lean atentamente y resuelvan.

a. La vida útil de una determinada marca de electrodoméstico es una variable aleatoria normal con $\mu = 7$ (en años) y una varianza de 0,25. Calculen la probabilidad de que el electrodoméstico dure más de 8 años.

b. La talla promedio (en cm) de una población de mujeres cuenta con distribución normal: N(160;10).

- Calculen la probabilidad de que una mujer mida menos de 160 cm.
- Calculen la probabilidad de que mida entre 150 cm y 170 cm.
- ¿Qué porcentaje de la población se distribuye entre 140 cm y 180 cm?

c. El tiempo estipulado para rendir un examen final está distribuido normalmente con una media de 80 minutos y desviación estándar de 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante complete el examen en menos de una hora?

DinámicaMente

La variable aleatoria N(16;3) corresponde a un grupo de datos, de los cuales 450 son menores que 13. Calculen la cantidad total de datos.

51. Distribución binomial

▶ SABERES DINÁMICOS

Variable aleatoria binomial de una variable aleatoria discreta

Llamamos **variable aleatoria binomial B** a una variable **aleatoria discreta** que expresa el **número de éxitos obtenidos** en cada prueba de un experimento.

Cumple con las siguientes condiciones:

- Solo son posibles dos resultados: "éxito" o "fracaso".
- La probabilidad del suceso "éxito" es constante, es decir, que no varía de una prueba a otra, y se representa por **p**.
- La probabilidad de "fracaso" es **q = 1 − p**.
- El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.
- La probabilidad de obtener **k** éxitos en un experimento que se repite **n** veces es:

$$B(k;n;p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Para recordar pág. 173

La probabilidad de elegir en la góndola del supermercado una lata de conserva que esté abollada es 0,1. Si se extraen 3 latas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dos de ellas no estén abolladas? $B(2;3;0,9) = \binom{3}{2} \cdot 0,9^2 \cdot 0,1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0,81 \cdot 0,1 = \mathbf{0,243}$

Se arroja un dado tres veces consecutivas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un múltiplo de 3 las tres veces? $B\left(3;3;\frac{1}{3}\right) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27} = \mathbf{0,037}$

Esperanza matemática de la distribución binomial

Se tira una moneda equilibrada 3 veces sucesivas.

Se define la variable aleatoria x: cantidad de veces que sale cara.

- Puede ser que ninguna vez salga cara. $B\left(0;3;\frac{1}{2}\right) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \mathbf{\frac{1}{8}}$
- Puede ser que una vez salga cara. $B\left(1;3;\frac{1}{2}\right) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{3}{8}}$
- Puede ser que dos veces salga cara. $B\left(2;3;\frac{1}{2}\right) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \mathbf{\frac{3}{8}}$
- Puede ser que las tres veces salga cara. $B\left(3;3;\frac{1}{2}\right) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \mathbf{\frac{1}{8}}$

El número medio de veces esperable de que la moneda salga cara es:

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \mathbf{\frac{3}{2}} = \mathbf{1,5}$$

En el caso de la distribución binomial, también se puede calcular utilizando la expresión: $\mu = n \cdot p$

En el ejemplo anterior, $\mu = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

La desviación estándar de la distribución binomial se calcula mediante la fórmula: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Tabla de distribución binomial. B(x;n;p) = B (2;3;0,4) = **0,2880** (la tabla completa está en página 176).

n	p / r	,01	,05	,10	,15	,20	,25	,30	1/3	,35	,40	,45	,49	,50
3	0	,9703	,8574	,7290	,6141	,5120	,4219	,3430	,2963	,2746	,2160	,1664	,1327	,1250
	1	,0294	,1354	,2430	,3251	,3840	,4219	,4410	,4444	,4436	,4320	,4084	,3823	,3750
	2	,0003	,0071	,0270	,0574	,0960	,1406	,1890	,2222	,2389	,2880	,3341	,3674	,3750
	3	,0000	,0001	,0010	,0034	,0080	,0156	,0270	,0370	,0429	,0640	,0911	,1176	,1250

ACTIVIDADES

51. Distribución binomial

Test de comprensión

38. Respondan y expliquen las respuestas.

a. $p = 0,1$ y $q = 0,7$ ¿corresponde a una distribución binomial?

b. $B(2;6;0,1)$ ¿es igual a 0,014?

c. Si en una distribución binomial $\sigma = 0,9487$ y $p = 0,1$, ¿es cierto que $n = 10$?

39. Calculen las siguientes probabilidades sabiendo que corresponden a una distribución binomial. Utilicen la tabla de la página 176.

a. $B(3;6;0,15) =$ _____

b. $B(1;4;0,2) =$ _____

c. $B(2;2;0,5) =$ _____

d. $B(4;7;0,05) =$ _____

40. Tengan en cuenta que la tabla de distribución binomial contempla hasta $p = 0,5$; completen y calculen.

Para recordar pág. 173

a. $B(1;4;0,9) = B(3;4;\square) =$ _____

b. $B(2;6;0,7) = B(4;\square;\square) =$ _____

c. $B(3;9;0,8) = B(\square;\square;\square) =$ _____

41. Sabiendo que $B(k;n;0,4)$, calculen el valor de k y n en cada caso.

a. $\binom{n}{k} 0,4^2 \cdot 0,6^5$ _____

b. $B(k;n;0,4) = 0,2880$ _____

42. Calculen el valor pedido en cada caso sabiendo que corresponden a variables aleatorias con distribución binomial.

a. $\mu = 0,28;\ n = 7;\ p =$ _____

b. $p = 0,8\ ;\ \sigma = 4;\ n =$ _____

c. $P(1; 5; 0,2) = P(4; 5; x);\ x =$ _____

d. $\sigma = 1,025;\ \mu = 1,5;\ p =$ _____ ; $q =$ _____

43. Lean atentamente y respondan.

Un examen de opción múltiple consta de 6 preguntas con 4 respuestas posibles para cada una de ellas. Una sola opción es correcta. Un estudiante completa al azar marcando las respuestas aleatoriamente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de elegir la opción correcta? _____

b. Calculen la probabilidad de que no acierte ninguna pregunta. _____

c. Calculen la probabilidad de que acierte 4 preguntas. _____

d. Calculen la probabilidad de que acierte más de 3 preguntas.

_____

e. Calculen la probabilidad de que acierte todas las preguntas.

_____

51. Distribución binomial

44. Calculen sin usar la tabla; luego, verifiquen el resultado.

a. $B(4;6;0,4) =$ _____

b. $B(2;5;0,7) =$ _____

c. $B(1;3;0,2) =$ _____

d. $B(0;2;0,6) =$ _____

45. Utilizando la tabla, calculen los valores pedidos en cada caso.

a. $P(k;n;0,45) = 0,0046$ $k =$ ☐ ; $n =$ ☐ ; $q =$ ☐

b. $P(3;5;p) = 0,0879$ $p =$ ☐ ; $q =$ ☐

c. $P(4;5;p) = 0,0412$ $p =$ ☐ ; $q =$ ☐

d. $P(k;5;0,05) = 0,0214$ $k =$ ☐

46. Lean atentamente y resuelvan.

Una caja contiene tres bolitas negras y dos rojas. Se considera la variable aleatoria que cuenta la cantidad de bolitas negras obtenidas al sacar tres bolitas sucesivamente.

a. ¿Corresponde a una distribución binomial? ¿Por qué?

_____

b. Si luego de cada extracción, se repone la bolita, ¿corresponde a una distribución binomial? ¿Por qué?

_____

c. Tengan en cuenta el caso anterior y calculen la probabilidad que de las tres, solo dos sean negras.

_____

47. Lean atentamente y respondan.

Según la Encuesta Anual de Hogares (2019), de la Dirección General Estadísticas y Censos, sobre una proyección de 3 075 646 residentes en la Ciudad de Buenos Aires, 424 439 personas nacieron en otro país.

Fuente: https://www.buenosaires.gob.ar/gobierno/migracion-en-la-ciudad#:~:text=En%20la%20Encuesta%20Anual%20de,%25%20cuenta%20con%20residencia%20permanente%2D

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una persona al azar, sea extranjera?

_____

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir 5 personas al azar, 2 sean extranjeras?

_____

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir 5 personas al azar, ninguna sea extranjera?

_____

d. Calculen el número medio esperable de que sea extranjero.

_____

51. Distribución binomial

48. Lean atentamente, completen las tablas y grafiquen.

En un control de calidad se detectó que una máquina fabrica un 20% de tornillos defectuosos. Se eligen al azar una cantidad de tornillos y se cuenta la cantidad de defectuosos.

a. $n = 2$

x: cantidad de tornillos defectuosos	B(k;n;p)
0	B(0;2;0,2) = 0,64
1	
2	

b. $n = 3$

x: cantidad de tornillos defectuosos	B(k;n;p)
0	B(0;3;0,2) = 0,512
1	
2	
3	

c. $n = 4$

x: cantidad de tornillos defectuosos	B(k;n;p)
0	B(0;4;0,2) = 0,4096
1	
2	
3	
4	

d. $n = 5$

x: cantidad de tornillos defectuosos	B(k;n;p)
0	B(0;5;0,2) = 0,3277
1	
2	
3	
4	
5	

e. Si la cantidad de tornillos elegidos es cada vez mayor, ¿a qué tipo de distribución se acerca la binomial? ($p > 0,1$ y $q > 0,1$). _____

Integración final

49. Resuelvan.

a. Grafiquen $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, $x \in [0; 2]$.

b. Demuestren que es una función de densidad.

c. Calculen $P(x < 1)$.

d. Encuentren el valor medio esperable.

50. Resuelvan.

a. Dada $f(x) = \frac{x}{a}$ y $0 < x < 10$, hallen el valor de a para que sea una función de densidad.

b. Calculen $P(2 < x < 5)$.

c. Encuentren la esperanza matemática.

51. Lean atentamente y resuelvan.

Un candado contiene una clave numérica compuesta por tres dígitos iguales o distintos (incluido el 0).
x: cantidad de veces que aparece el 1 en la clave.

a. Calculen P(1).

b. Completen la tabla.

x: cantidad de 1	0	1	2	3
P(x)				

c. La variable aleatoria ¿es continua o discreta?

d. Comprueben que P(x) es una función de probabilidad.

e. Marquen con una X la opción correcta.
La distribución es:

- Normal. ☐
- Binomial. ☐
- Ninguna de las dos. ☐

52. Completen con el valor correspondiente en cada caso.

a. $N(15; 3)$ y $P(z < 0,4)$; $P(x <$ ☐ $)$

b. $P(z < 3a - 2) = 0,8461$; $a =$ ☐

c. $P(2,4 < z < 3,25) =$ ☐

d. $P(|Z| < 2) =$ ☐

53. Lean atentamente y respondan.

a. El valor promedio calculado de la presión arterial sanguínea en una población adolescente de ambos sexos es de 108 mm de Hg, con una desviación estándar 14 mm de Hg.

- ¿Qué porcentaje de la población tiene una presión comprendida en el intervalo (94; 122)
- Calculen $P(108 < x < 122)$

b. La longitud (en cm) de los tornillos fabricados por una máquina sigue una distribución normal: $N(1,75; 0,1)$.

- Calculen la probabilidad de elegir un tornillo con una longitud mayor que 1,5 cm.
- Calculen la probabilidad de que la longitud esté comprendida entre 1,65 cm y 1,85 cm.

54. Escriban la función de la densidad normal conociendo μ y σ.

a. $\mu = 2$ y $\sigma = 0,5$

b. $\mu = 0$ y $\sigma = 1$

55. Lean atentamente y respondan.

Numerosos estudios han demostrado que iniciar el consumo de tabaco a una edad temprana en la adolescencia sería un fuerte predictor del consumo de tabaco en la edad adulta. Entre un 25% y un 50% de los adolescentes experimentadores terminarán convirtiéndose en fumadores habituales en la edad adulta (que trae aparejado un perjuicio para la salud), con mayor consumo de cigarrillos, más años de consumo y mayor riesgo de recaída en el proceso de deshabituación. La edad de inicio del consumo de tabaco en los varones es de 15 ± 4 años, y de 17 ± 5 años en las mujeres.

Fuente: https://www.elsevier.es/es-revista-atencion-primaria-27-articulo-edad-inicio-el-consumo-del-13075481#:~:text=De%20los%202.801%20fumadores%20estudiados,4%20a%C3%B1os%20entre%20las%20mujeres.

a. Calculen la probabilidad de que un varón comience a fumar antes de los 13 años.

b. Calculen la probabilidad de que una mujer comience a fumar después de los 20 años.

56. Marquen con una X la respuesta correcta.

a. $B(1;2;0,4) =$

- 0,48 ☐
- 0,36 ☐
- 0,16 ☐

b. $B(3;5;0,7) =$

- $B(2;3;0,7)$ ☐
- $B(2;5;0,7)$ ☐
- $B(2;5;0,3)$ ☐

c. $B(1;3;p) = 0,2430$

- $q = 0,1$ ☐
- $q = 0,01$ ☐
- $q = 0,9$ ☐

57. Calculen lo pedido en cada caso sabiendo que corresponde a una variable aleatoria binomial.

a. $n = 25$; $p = 0,2$. Calculen μ.

b. $n = 100$; $q = 0,7$. Calculen σ.

c. $\binom{5}{k} . 0,6^k . 0,4^{5-k}$. Calculen μ y σ.

d. $\sigma = 1,0247$; $q = 0,7$. Calculen n.

58. Observen la siguiente tabla correspondiente a una distribución binomial y resuelvan.

x	0	1	2	3
B(x;n;p)	0,729	0,243	0,027	a

a. Hallen el valor de a.

b. Utilizando la tabla, hallen el valor de n y de p.

c. Indiquen el valor de q.

d. Calculen la esperanza matemática.

59. Lean atentamente y resuelvan.

Se lanza un dado 4 veces.
x: cantidad de veces que sale el 3.

a. Calculen la probabilidad de que no salga 3.

b. Calculen el número promedio de veces esperado de que salga 3.

60. Lean atentamente y resuelvan.

a. Un tratamiento contra una enfermedad produce mejoría en 7 de cada 10 enfermos a los que se les aplica. Si se suministra el tratamiento a 4 pacientes, calculen la probabilidad de:

- que los 4 mejoren.
- que 3 de ellos no experimenten mejoría.

b. Según el sitio "Luchemos por la Vida" el uso del casco en la Ciudad de Buenos Aires en motocicletas y ciclomotores (año 2008) es del 65%.
Se controlan al azar 10 motociclistas. Calculen:

- la probabilidad de que 7 de ellos no lleven casco.
- la probabilidad de que 3 lleven casco.
- la cantidad esperable de motociclistas con casco.

c. Se arroja una moneda equilibrada 500 veces.
x: cantidad de veces que sale cara.

- Calculen la desviación estándar.

d. Se lanza un dado equilibrado 20 veces. Calculen el número promedio esperado de veces:

- que salga el 3.
- que salga un número par.
- que salga un 2 o un 3.
- que salga cualquier número menos el 1.

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Probabilidad de un suceso

S: suceso aleatorio.
E = Ω (espacio muestral)

La probabilidad de que un suceso ocurra es:

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{\#S}{\#E} \wedge 0 \leq P(S) \leq 1$$

Factorial de un número natural

$n! = n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \,.\, (n-3) \,\ldots\, 1$ para $n > 0$

1 para $n = 0$

Definición por recursión.

$$\begin{cases} n! = n \,.\, (n-1)! \text{ para } n > 0 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

Número combinatorio

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \,.\, (n-k)!}$$

Ejemplo: $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \,.\, (6-2)!} = \frac{6!}{2! \,.\, 4!} = \frac{6 \,.\, 5 \,.\, \cancel{4!}}{2! \,.\, \cancel{4!}} = 15$

Propiedades de los números combinatorios.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

8 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

61. Lean atentamente y resuelvan.

La perinola es un trompo que tiene 6 caras con distintas escrituras: "Toma 1", "Toma 2", "Toma todo", "Pon 1", "Pon 2" y "Todos ponen".

a. ¿Qué tipo de variable aleatoria es x (cantidad de veces que sale "Toma todo") en una determinada cantidad de tiradas?

◯ Continua. ◯ Discreta. ◯ Ninguna de las dos.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al girar la perinola salga "Toma todo"?

◯ $\frac{1}{3}$ ◯ $\frac{1}{4}$ ◯ $\frac{1}{6}$ ◯ Ninguna de las anteriores.

c. Si se gira 5 veces seguidas la perinola, ¿cuál es la probabilidad de que "Toma todo" salga 2 veces?

◯ 0,16 ◯ 0,26 ◯ 0,36 ◯ Ninguna de las anteriores.

62. Observen la siguiente tabla y resuelvan.

x	0	1	2
P(x)	0,5625	a	0,0625

a. ¿Cuál debe ser el valor de a para que P(x) sea una función de probabilidad?

◯ 0,4 ◯ 0,375 ◯ 0,35 ◯ Ninguna de las anteriores.

b. Si P(x) corresponde a una distribución binomial, ¿cuál es el valor de p?

◯ 0,25 ◯ 0,30 ◯ 0,35 ◯ Ninguna de las anteriores.

63. ¿Cómo debe ser el coeficiente de correlación para analizar si existe correlación lineal entre dos variables x?

◯ $r > 1$ ◯ $r = 0$ ◯ $|r| \leq 1 \wedge r \neq 0$ ◯ Ninguna de las anteriores.

64. Lean atentamente y resuelvan.

Las pulsaciones normales de un adulto en movimiento realizando un deporte de alto rendimiento se distribuyen normalmente con una media de 175 latidos por minuto y una desviación estándar de 25.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que las pulsaciones sean mayores que 180?

◯ 0,6915 ◯ 0,42074 ◯ 0,8849 ◯ Ninguna de las anteriores.

b. ¿Entre qué valores oscilan las pulsaciones del 68% de la población de adultos en movimiento que están realizando un deporte de alto rendimiento?

◯ (150; 200) ◯ (125; 225) ◯ (100; 250) ◯ Ninguna de las anteriores.

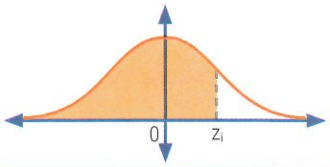
TABLA DE DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR (ACUMULADA)

μ = media

σ = desviación estándar

Estandarización: $z_i = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$$P(z \leq z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_i} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$



z_i	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_i
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

$1 - \alpha$	90 %	92 %	94 %	95 %	96 %	97 %	98 %	99 %
α	10 %	8 %	6 %	5 %	4 %	3 %	2 %	1 %
$z_{\alpha/2}$	1,645	1,751	1,881	1,960	2,054	2,170	2,326	2,576
z_{α}	1,282	1,405	1,555	1,645	1,751	1,881	2,054	2,326

Siendo:

$1 - \alpha$: nivel de confianza

α: nivel de significación

TABLA DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

n	P r	,01	,05	,10	,15	,20	,25	,30	1/3	,35	,40	,45	,49	,50
2	0	,9801	,9025	,8100	,7225	,6400	,5625	,4900	,4444	,4225	,3600	,3025	,2601	,2500
	1	,0198	,0950	,1800	,2550	,3200	,3750	,4200	,4444	,4550	,4800	,4950	,4998	,5000
	2	,0001	,0025	,0100	,0225	,0400	,0625	,0900	,1111	,1225	,1600	,2025	,2401	,2500
3	0	,9703	,8574	,7290	,6141	,5120	,4219	,3430	,2963	,2746	,2160	,1664	,1327	,1250
	1	,0294	,1354	,2430	,3251	,3840	,4219	,4410	,4444	,4436	,4320	,4084	,3823	,3750
	2	,0003	,0071	,0270	,0574	,0960	,1406	,1890	,2222	,2389	,2880	,3341	,3674	,3750
	3	,0000	,0001	,0010	,0034	,0080	,0156	,0270	,0370	,0429	,0640	,0911	,1176	,1250
4	0	,9606	,8145	,6561	,5220	,4096	,3164	,2401	,1975	,1785	,1296	,0915	,0677	,0625
	1	,0388	,1715	,2916	,3685	,4096	,4219	,4116	,3951	,3845	,3456	,2995	,2600	,2500
	2	,0006	,0135	,0486	,0975	,1636	,2109	,2646	,2963	,3105	,3456	,3675	,3747	,3750
	3	,0000	,0005	,0036	,0115	,0256	,4609	,0756	,0988	,1115	,1536	,2005	,2400	,2500
	4	,0000	,0000	,0001	,0005	,0016	,0039	,0081	,0123	,0150	,0256	,0410	,0576	,0625
5	0	,9510	,7738	,5905	,4437	,3277	,2373	,1681	,1317	,1160	,0778	,0503	,0345	,0312
	1	,0480	,2036	,3280	,3915	,4096	,3855	,3602	,3292	,3124	,2592	,2059	,1657	,1562
	2	,0010	,0214	,0729	,1382	,2048	,2637	,3087	,3292	,3364	,3456	,3369	,3185	,3125
	3	,0000	,0011	,0081	,0244	,0512	,0879	,1323	,1646	,1811	,2304	,2757	,3060	,3125
	4	,0000	,0000	,0004	,0022	,0064	,0146	,0284	,0412	,0488	,0768	,1128	,1470	,1562
	5	,0000	,0000	,0000	,0001	,0003	,0010	,0024	,0041	,0053	,0102	,0185	,0283	,0312
6	0	,9415	,7351	,5314	,3771	,2621	,1780	,1176	,0878	,0754	,0467	,0277	,0176	,0156
	1	,0571	,2321	,3543	,3993	,3932	,3560	,3025	,2634	,2437	,1866	,1359	,1014	,0938
	2	,0014	,0305	,0984	,1762	,2458	,2966	,3241	,3292	,3280	,3110	,2780	,2437	,2344
	3	,0000	,0021	,0146	,0415	,0819	,1318	,1852	,2195	,2355	,2765	,3032	,3121	,3125
	4	,0000	,0001	,0012	,0055	,0154	,0330	,0595	,0823	,0951	,1382	,1861	,2249	,2344
	5	,0000	,0000	,0001	,0004	,0015	,0044	,0102	,0165	,0205	,0369	,0609	,0864	,0938
	6	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0002	,0007	,0014	,0018	,0041	,0083	,0139	,0156
7	0	,9321	,6983	,4783	,3206	,2097	,1335	,0824	,0585	,0490	,0280	,0152	,0090	,0078
	1	,0659	,2573	,3720	,3960	,3670	,3115	,2471	,2048	,1848	,1306	,0872	,0603	,0574
	2	,0020	,0406	,1240	,2097	,2753	,3115	,3177	,3073	,2985	,2613	,2140	,1740	,1641
	3	,0000	,0036	,0230	0,617	,1147	,1730	,2269	,2561	,2679	,2903	,2918	,2786	,2734
	4	,0000	,0002	,0026	,0109	,0287	,0577	,0972	,1280	,1442	,1935	,2388	,2676	,2734
	5	,0000	,0000	,0002	,0012	,0043	,0115	,0250	,0384	,0466	,0774	,1172	,1543	,1641
	6	,0000	,0000	,0000	,0001	,0004	,0013	,0036	,0064	,0084	,0172	,0320	,0494	,0547
	7	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0002	,0005	,0006	,0016	,0037	,0068	,0078
8	0	,9227	,6634	,4305	,2725	,1678	,1001	,0576	,0390	,0319	,0168	,0084	,0046	,0039
	1	,0746	,2793	,3826	,3847	,3355	,2670	,1977	,1561	,1373	,0896	,0548	,0352	,0312
	2	,0026	,0515	,1488	,2376	,2936	,3115	,2965	,2731	,2587	,2090	,1569	,1183	,1094
	3	,0001	,0054	,0331	,0839	,1468	,2076	,2541	,2731	,2786	,2787	,2568	,2273	,2188
	4	,0000	,0004	,0046	,0185	,0459	,0865	,1361	,1707	,1875	,2322	,2627	,2730	,2734
	5	,0000	,0000	,0004	,0026	,0092	,0231	,0467	,0683	,0808	,1239	,1719	,2098	,2188
	6	,0000	,0000	,0000	,0002	,0011	,0038	,0100	,0171	,0217	,0413	,0703	,1008	,1094
	7	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0004	,0012	,0024	,0033	,0079	,0164	,0277	,0312
	8	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0002	,0002	,0007	,0017	,0033	,0039
9	0	,9135	,6302	,3874	,2316	,1342	,0751	,0404	,0260	,0207	,0101	,0046	,0023	,0020
	1	,0830	,2985	,3874	,3679	,3020	,2253	,1556	,1171	,1004	,0605	,0339	,0202	,0176
	2	,0034	,0629	,1722	,2597	,3020	,3003	,2688	,2341	,2162	,1612	,1110	,0776	,0703
	3	,0001	,0077	,0446	,1069	,1762	,2336	,2668	,2731	,2716	,2508	,2119	,1739	,1641
	4	,0000	,0006	,0074	,0283	,0661	,1168	,1715	,2048	,2194	,2508	,2600	,2506	,2461
	5	,0000	,0000	,0008	,0050	,0165	,0389	,0735	,1024	,1181	,1672	,2128	,2408	,2461
	6	,0000	,0000	,0001	,0006	,0028	,0087	,0210	,0341	,0424	,0743	,1160	,1542	,1641
	7	,0000	,0000	,0000	,0000	,0003	,0012	,0039	,0073	,0098	,0212	,0407	,0635	,0703
	8	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0004	,0009	,0013	,0035	,0083	,0153	,0176
	9	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0001	,0003	,0008	,0016	,0020
10	0	0,914	,5987	,3487	,1969	,1074	,0563	,0282	,0173	,0135	,0060	,0025	,0012	,0010
	1	,0042	,3151	,3874	,3474	,2684	,1877	,1211	,0867	,0725	,0403	,0207	,0114	,0098
	2	,0001	,0746	,1937	,2759	,3020	,2816	,2335	,1951	,1757	,1209	,0763	,0495	,0439
	3	,0000	,0105	,0574	,1298	,2013	,2503	,2668	,2601	,2522	,2150	,1665	,1267	,1172
	4	,0000	,0010	,0112	,0401	,0881	,1460	,2001	,2276	,2377	,2508	,2384	,2130	,2051
	5	,0000	,0001	,0015	,0085	,0264	,0584	,1029	,1366	,1536	,2007	,2340	,2456	,2461
	6	,0000	,0000	,0001	,0012	,0055	,0162	,0368	,0596	,0689	,1115	,1596	,1966	,2051
	7	,0000	,0000	,0000	,0001	,0008	,0031	,0090	,0163	,0212	,0425	,0746	,1080	,1172
	8	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0004	,0014	,0030	,0043	,0106	,0229	,0389	,0439
	9	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0003	,0005	,0016	,0042	,0083	,0098
	10	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0001	,0003	,0008	,0010